

Chapitre 8

Droites et plans dans l'espace

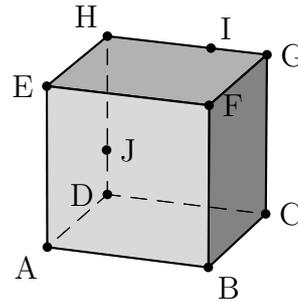
I Exercices

8.1 Positions relatives de droites et de plans

Exercice 8.1

ABCDEFGH est un cube. Le point I est sur l'arête [HG]. Le point J est un point de la face ABFE.

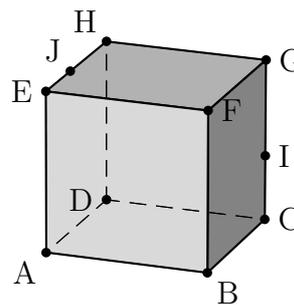
1. Le point I appartient-il au plan (CGH) ?
2. Le point B appartient-il au plan (ADH) ?
3. Les points D et H sont-ils coplanaires ?
4. Les points A, E, I sont-ils coplanaires ?
5. Les points A, B, C, G sont-ils coplanaires ?
6. Les points C, H, I, G sont-ils coplanaires ?
7. Les points D, J, H sont-ils alignés ?



Exercice 8.2

ABCDEFGH est un cube. Le point I est sur l'arête [CG] et le point J est sur l'arête [EH]. Préciser en justifiant la position relative

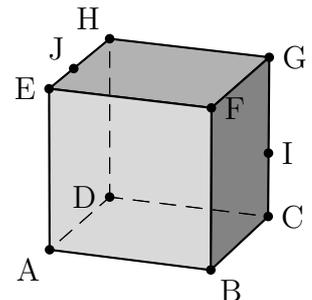
1. de la droite (DJ) et du plan (DHE) ;
2. de la droite (CE) et du plan (CDH) ;
3. de la droite (FG) et du plan (ABC) ;



Exercice 8.3

ABCDEFGH est un cube. Le point I est sur l'arête [CG]. le point J est sur l'arête [EH]. Préciser en justifiant la position relative

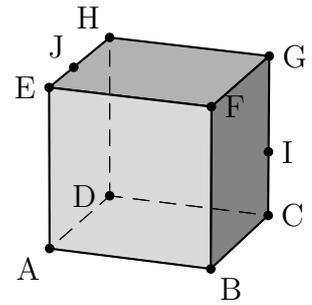
1. des plans (AEH) et (BCG) ;
2. des plans (ABC) et (EFB) ;
3. des plans (FGC) et (IBF) ;



Exercice 8.4

ABCDEFGH est un cube. Le point I est sur l'arête [CG]. Le point J est sur l'arête [EH]. En justifiant, préciser la position relative

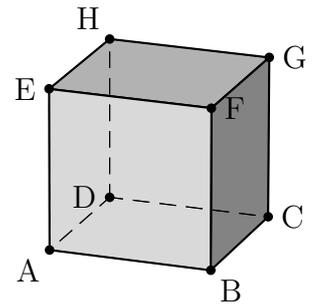
1. des droites (HI) et (GH) ;
2. des droites (CD) et (BF) ;
3. des droites (AD) et (EH) ;
4. des droites (EJ) et (EH).

**8.2 Parallélisme dans l'espace****Exercice 8.5**

ABCDEFGH est un cube.

Les points I et J sont les milieux respectifs de [EG] et de [FG].

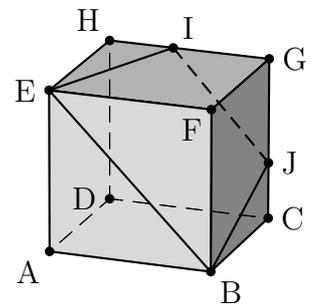
1. Compléter la figure ci-contre.
2. Quelle est la position relative des droites (IJ) et (AB) ? Le démontrer.

**Exercice 8.6**

ABCDEFGH est un cube.

Le point I appartient à l'arête [HG]. Le plan (BEI) coupe la droite (GC) en J.

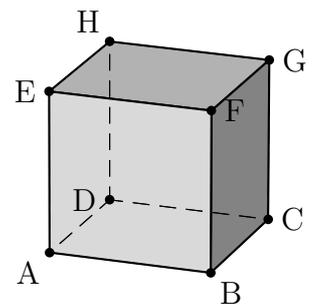
1. Sans justifier, indiquer
 - l'intersection des plans (BEI) et (HGC) ;
 - l'intersection des plans (BEI) et (EFB).
2. Quelle est la position relative des droites (BE) et (IJ) ? Justifier en citant une propriété.
3. On dit que le quadrilatère BEIJ est la section du cube ABCDEFGH par le plan (BEI).
Quelle est la nature de cette section ?

**Exercice 8.7**

ABCDEFGH est un cube.

Les points I et J appartiennent respectivement aux arêtes [EH] et [FG].

1. Compléter la figure ci-contre.
2. Quelle est la position relative de la droite (IJ) et du plan (EFG) ? Justifier.
3. Quelle est la position relative des plans (EFG) et (ABC) ? Justifier.
4. Quelle est la position relative de la droite (IJ) et du plan (ABC) ? Justifier en citant une propriété.



8.3 Section d'un solide par un plan

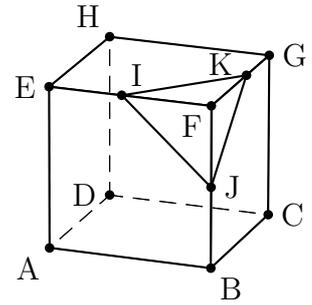
Exercice 8.8

ABCDEFGH est un cube. Les points I, J, K appartiennent respectivement aux arêtes [FE], [FB], [FG].

Supposons que le cube soit en bois ou en polystyrène, que l'on coupe le cube selon le plan (IJK), et que l'on enlève la partie coupée.

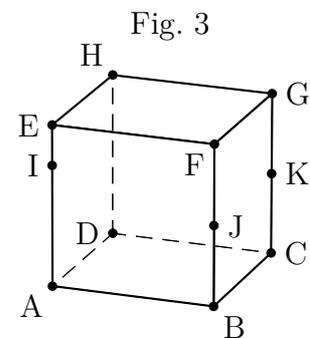
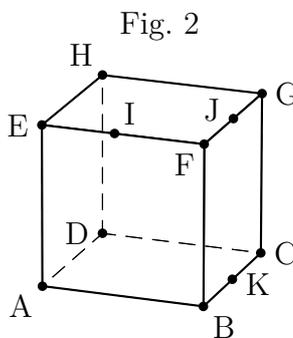
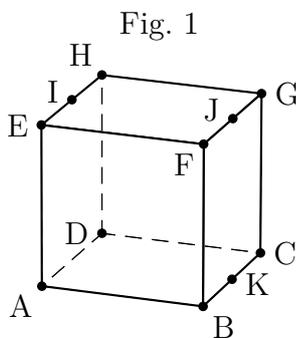
La section est la figure que l'on voit à l'endroit où on a coupé.

1. Quelle est cette figure ?
2. Colorier ou hachurer cette figure.



Exercice 8.9

Dans chacun des cubes ABCDEFGH ci-dessous, construire la section de ce cube par le plan (IJK), puis colorier ou hachurer cette section.



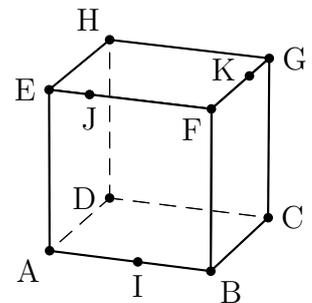
Exercice 8.10

ABCDEFGH est un cube. Les points I, J, K appartiennent respectivement aux arêtes [AB], [EF], [FG].

Construire la section de ce cube par le plan (IJK), puis colorier ou hachurer cette section.

Indications :

- le plan (IJK) coupe le plan (ABC) selon une droite (Δ);
- que sait-on des droites (JK) et (Δ) ?

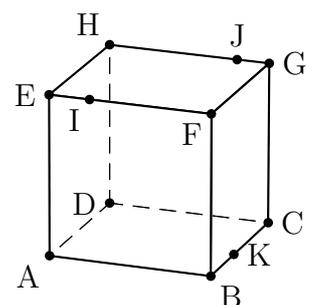


Exercice 8.11

ABCDEFGH est un cube. Les points I, J, K appartiennent respectivement aux arêtes [EF], [GH], [BC].

Construire la section de ce cube par le plan (IJK), puis colorier ou hachurer cette section.

Indication : la droite (IJ) coupe (FG) en L.



8.4 Orthogonalité dans l'espace

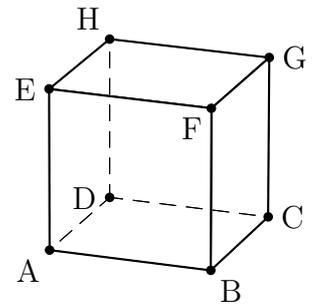
Avant de faire l'exercice ci-dessous, lire la définition de droites orthogonales dans le cours, paragraphe 8.4, définition **(O1)**.

Exercice 8.12

Dans le cube ABCDEFGH, déterminons si les droites (AD) et (GH) sont orthogonales.

Pour cela, traçons la parallèle à (AD) et la parallèle à (GH) passant par A, et vérifions si les droites obtenues sont perpendiculaires ou non.

1. La parallèle à (AD) passant par A est la droite (AD) elle-même.
Quelle est la parallèle à (GH) passant A ?
2. Cette dernière droite est-elle perpendiculaire à (AD) ?
3. Les droites (AD) et (GH) sont-elles orthogonales ?



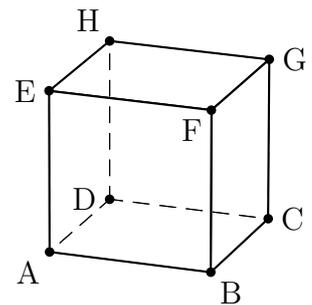
Exercice 8.13

Dans le cube ABCDEFGH ci-contre, justifier chaque fois si les droites indiquées ci-dessous sont orthogonales ou non.

Dans chaque cas :

- indiquer le point choisi et la parallèle à l'une et la parallèle à l'autre qui passent par ce point ;
- vérifier si les droites obtenues sont perpendiculaires ou non ;
- conclure.

1. (EF) et (AD)
2. (BD) et (EH)
3. (BC) et (DH)

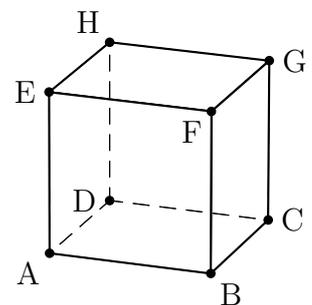


Avant de faire l'exercice ci-dessous, lire les propriétés **(O2)** et **(O3)** dans le cours, paragraphe 8.4.

Exercice 8.14

Dans le cube ABCDEFGH, pour justifier que la droite (EH) est orthogonale au plan (DCG), on doit indiquer deux droites du plan (DCG) qui sont orthogonales à la droite (EH).

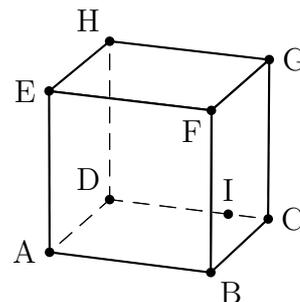
1. Indiquer deux droites du plan (DCG) qui sont orthogonales à la droite (EH).
2. Les droites (EH) et (HC) sont-elles orthogonales ?



Exercice 8.15

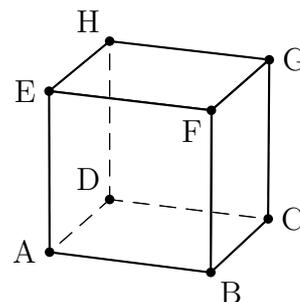
ABCDEFGH est un cube d'arête 4 cm. Le point I est le point de l'arête [CD] tel que $DI = 3$ cm.

1. Calculer AI en justifiant.
2. Quelle est la nature du triangle EAI? Justifier.
3. Calculer EI. Donner la valeur exacte.

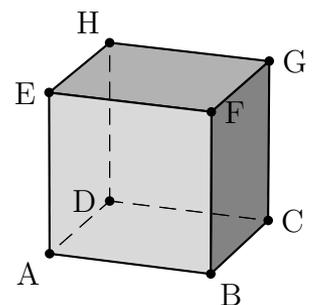
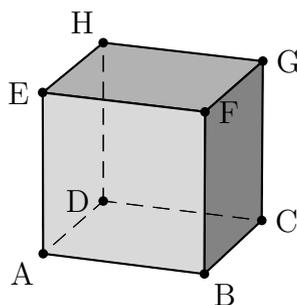
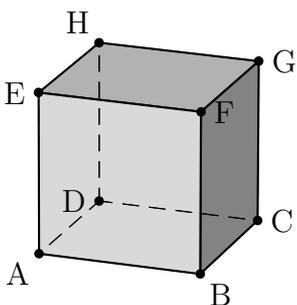
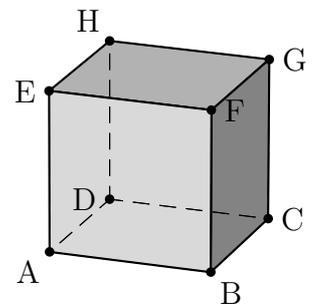
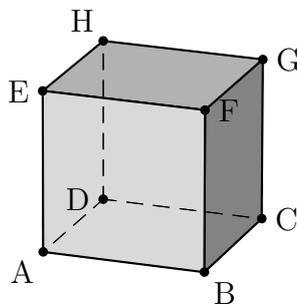
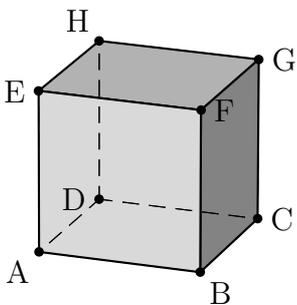
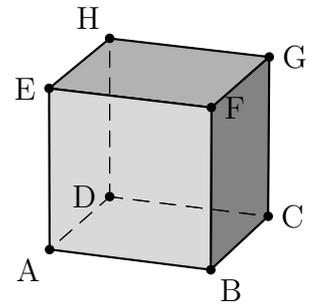
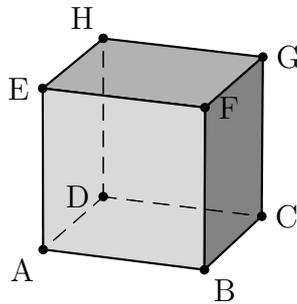
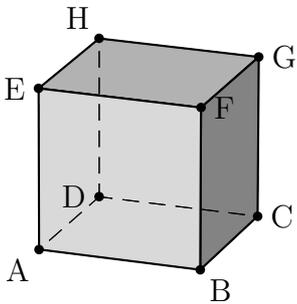
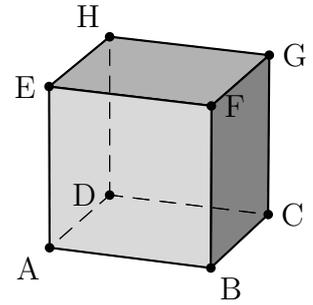
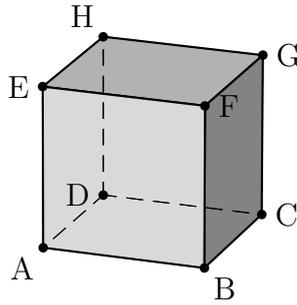
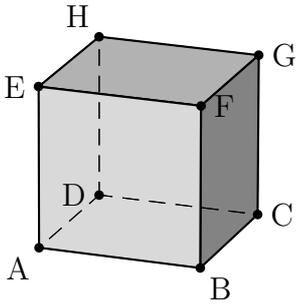
**Exercice 8.16**

Démontrer que les droites (GH) et (ED) sont orthogonales.

Indication : démontrer d'abord que la droite (GH) est orthogonale au plan (AEH).



8.5 Annexe : figures pour les exercices



8.6 Pour réviser

Chapitre 10 – Géométrie dans l'espace : droites et plans

Rubrique *Pour s'exercer*, corrigés page 468

- ex 2 p 271, ex 9 p 273 : positions relatives de droites
- ex 10 p 273 : section d'un cube par un plan
- ex 13, 14 p 275 : droites et plans orthogonaux

Les exercices résolus

- ex 1 p 271 : justifier des positions relatives de droites et de plans
- ex 7 p 273 : droites parallèles, parallélogramme, tétraèdre
- ex 8 p 273 : section d'un cube par un plan
- ex 11, 12 p 275 : droites orthogonales

Rubrique *Objectif bac*, corrigés page 476-477

- ex 56, 57, 58 p 281 : QCM et Vrai/Faux
- ex 59 p 282 : volume et fonction, orthocentre d'un triangle
- ex 60, 61, 62 p 283

II Cours

8.1 Rappels de troisième

- La section d'un pavé droit par un plan parallèle à une face ou par un plan parallèle à une arête est un rectangle.
- La section d'un cylindre droit par un plan parallèle à son axe est un rectangle.
- La section d'un cylindre droit par un plan perpendiculaire à son axe est un disque.
- La section d'une pyramide ou d'un cône par un plan parallèle à sa base est une réduction de sa base.
- la section d'une sphère par un plan est un cercle.

8.2 Positions relatives de droites et de plans

Le programme indique qu'un élève doit savoir étudier les positions relatives de droites et de plans.

8.2.a Coplanaire

- **C1** « Coplanaire » signifie « contenu dans un même plan ».
- **C2** Trois points de l'espace sont toujours coplanaires.
- **C3** Une droite et un point de l'espace sont toujours coplanaires.
- **C4** Il existe un seul plan qui contienne trois points non alignés.
- **C5** Il existe un seul plan qui contienne une droite et un point hors de cette droite.

8.2.b Deux droites dans l'espace

Définitions et propriétés

- **DD1** Deux droites sécantes sont deux droites qui ont un seul point d'intersection.
- **DD2** Deux droites sécantes sont coplanaires.
- **DD3** Deux droites strictement parallèles, sont deux droites coplanaires d'intersection vide.
- **DD4** Deux droites parallèles sont deux droites strictement parallèles ou confondues.

Récapitulation

Deux droites d'un plan peuvent être

- coplanaires : dans ce cas elles sont sécantes ou parallèles ;
si elles sont parallèles, on peut avoir deux cas :
 - les deux droites sont strictement parallèles ;
 - les deux droites sont confondues ;
- non coplanaires.

Méthode

- Pour prouver que deux droites (AB) et (CD) sont coplanaires, on peut chercher à justifier que
 - les droites (AB) et (CD) sont sécantes ;
 - les droites (AB) et (CD) sont parallèles ;
 - un des quatre points A, B, C, D appartient au plan défini par les trois autres.
- Pour prouver que deux droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires, on doit justifier qu'un des quatre points A, B, C, D n'appartient pas au plan défini par les trois autres.

8.2.c Une droite et un plan dans l'espace

Définitions

- **(DP1)** Dire qu'une droite et un plan sont sécants signifie que leur intersection est un point.
- **(DP2)** Dire qu'une droite et un plan sont strictement parallèles signifie que leur intersection est vide.
- **(DP3)** Dire qu'une droite et un plan sont parallèles signifie que cette droite et ce plan sont strictement parallèles, ou que cette droite est incluse dans ce plan.

Récapitulation

Une droite et un plan de l'espace peuvent être sécants ou parallèles.

- S'ils sont sécants, leur intersection est un point.
- S'ils sont parallèles, on peut avoir deux cas :
 - la droite et le plan sont strictement parallèles, alors leur intersection est vide ;
 - la droite est incluse dans le plan.

Propriétés

- **(DP4)** Si deux points distincts sont dans un plan, alors la droite passant par ces deux points est incluse dans ce plan.
- **(DP5)** Si une droite passe par un point d'un plan et un point hors de ce plan, alors cette droite et ce plan sont sécants.

8.2.d Deux plans dans l'espace

Définitions et propriétés

- **(PP1)** Deux plans sécants sont deux plans qui ont au moins un point en commun et qui ne sont pas confondus.
- **(PP2)** L'intersection de deux plans sécants est une droite.
- **(PP3)** Deux plans strictement parallèles sont deux plans dont l'intersection est vide.
- **(PP4)** Deux plans parallèles sont deux plans strictement parallèles ou confondus.

Récapitulation

Deux plans de l'espace peuvent être sécants ou parallèles.

- S'ils sont sécants, leur intersection est une droite.
- S'ils sont parallèles, ils peuvent être :
 - strictement parallèles, alors leur intersection est vide ;
 - confondus.

8.3 Parallélisme dans l'espace

Les figures illustrant les propriétés de ce paragraphe se trouvent dans le manuel Hyperbole page 272.

Propriétés – Droites parallèles

- **(PL1)** Si deux droites de l'espace sont parallèles à une même troisième, alors ces deux droites sont parallèles entre elles.
- **(PL2)** Si deux droites sont parallèles et si un plan coupe une de ces deux droites, alors ce plan coupe l'autre droite.

Propriétés – Droite et plan parallèles

- **PL3** Si deux plans sont parallèles et sont coupés par un troisième plan, alors les deux droites d'intersection sont parallèles.
- **PL4** Si deux plans sont parallèles et si une droite est incluse dans un de ces deux plans, alors cette droite est parallèle à l'autre plan.
- **PL5** Si une droite (Δ) est parallèle à une droite (d) incluse dans un plan (P), alors cette droite (Δ) est parallèle au plan (P).
- **PL6** Si un plan contient deux droites sécantes, et que ces deux droites sont parallèles à un autre plan, alors ces deux plans sont parallèles.

Théorème « du toit »

- PL7** Si deux plans (P) et (P') sont sécants selon une droite (Δ), et si (d) et (d') sont deux droites parallèles contenues respectivement dans (P) et (P'), alors la droite (Δ) est parallèle à (d) et à (d').

8.4 Orthogonalité dans l'espace

Le programme indique qu'un élève doit savoir établir l'orthogonalité d'une droite et d'un plan.

Les figures illustrant les propriétés de ce paragraphe se trouvent dans le manuel Hyperbole page 274.

Définition – Orthogonalité de deux droites.

- O1** Dire que deux droites de l'espace sont orthogonales signifie que la parallèle à l'une et la parallèle à l'autre passant par un même point sont perpendiculaires.

Remarques

- Deux droites perpendiculaires sont donc deux droites sécantes et orthogonales.
- Si deux droites sont perpendiculaires, alors elle sont orthogonales.
- La réciproque est fautive : on peut avoir des droites orthogonales qui ne se coupent pas et ne sont donc pas perpendiculaires.

Définition – Orthogonalité d'une droite et d'un plan

- O2** Dire qu'une droite et un plan sont orthogonaux signifie que cette droite est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Propriété

- O3** Si une droite est orthogonale à un plan, alors cette droite est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Remarque

Certains livres donnent la propriété ci-dessus comme définition et la définition ci-dessus comme propriété.

Propriété – Une droite et deux plans

- **O4** Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ces deux plans sont parallèles.
- **O5** Si deux plans sont parallèles, et si une droite est orthogonale à un de ces deux plans, alors cette droite est orthogonale à l'autre plan.

Propriété – Deux droites et un plan

- **O6** Si deux droites sont orthogonales à un même plan, alors ces deux droites sont parallèles.
- **O7** Si deux droites sont parallèles, et si un plan est orthogonal à une de ces deux droites, alors ce plan est orthogonal à l'autre droite.