Chapitre 6

Fonction exponentielle

I Exercices

6.1 Calculs – Équations – Inéquations

Exercice 6.1

Écrire chaque expression sous la forme d'une seule exponentielle.

1. $\mathrm{e}^{0,3} \times \mathrm{e}^{1,4}$ **2.** $\dfrac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^5}$ **3.** $\left(\mathrm{e}^{-4}\right)^2$ **4.** $\mathrm{e}^{2x} \times \mathrm{e}^{x+3}$ **5.** $\dfrac{\mathrm{e}^{2x-3}}{\mathrm{e}^x}$ **6.** $\left(\mathrm{e}^x\right)^3 \times \mathrm{e}^{0,5x}$

Exercice 6.2

QCM : choisir la bonne réponse parmi les propositions ci-dessous. Pour tout réel x, e^{x-2} est égal à :

1. $\dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$ **2.** $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^2}$ **3.** $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^2$

Exercice 6.3

1. Simplifier les expressions suivantes : $A = \dfrac{\mathrm{e}^{6x} \times \mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^5}$ $B = \left(\mathrm{e}^{3x}\right)^2 \times \mathrm{e}^{5-x}$
2. Factoriser l'expression : $\mathrm{e}^{2x} - 1$

Exercice 6.4

1. Transformer l'expression $3\mathrm{e}^{5x} \times \left(-6\mathrm{e}^{-2x+4}\right)$ sous la forme $a\mathrm{e}^{bx+c}$.
2. Simplifier l'expression $\left(\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{-3x}\right) \times \left(\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{-3x}\right)$.
3. Transformer l'expression $\dfrac{\mathrm{e}^{6x} \times \left(\mathrm{e}^{x+3}\right)^2}{\mathrm{e}^{x+2}}$ sous la forme e^{dx+e}.

Exercice 6.5

Transformer l'expression $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$ sous la forme $\dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^{ax}}$

Exercice 6.6

Dans chaque cas, justifier si l'égalité est vraie pour tout réel x.

1. $\dfrac{\mathrm{e}^{x+2}}{\mathrm{e}^{2x+2} + \mathrm{e}^2} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$ **2.** $\dfrac{\mathrm{e}^{5x+1}}{\mathrm{e}^{10x}} = x\mathrm{e}^{-5x}$

Exercice 6.7

1. Résoudre les équations ci-dessous.

   a) $e^{4x+6} = e^5$ **b)** $e^{x^2} = e$ **c)** $e^{5x-3} = 1$ **d)** $e^{-3x+2} - e^x = 0$ **e)** $e^{3x} = -4$

2. Résoudre l'équation : $(3x - 7)\, e^x = 0$
3. Résoudre les inéquations ci-dessous.

   a) $e^{2x+5} > e^3$ **b)** $e^{4x} \leqslant e^{7x-6}$ **c)** $e^{-x} \leqslant e^x$ **d)** $e^{3x-2} < 0$ **e)** $e^x > 1$

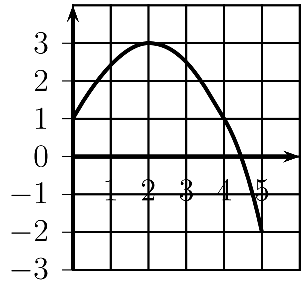
4. Résoudre l'inéquation : $(2x + 5)\, e^{-x} < 0$

Exercice 6.8

Quel est le nombre de solutions de l'équation $e^{2x} + e^x - 6 = 0$? Justifier. Indication : poser $X = e^x$.

Exercice 6.9

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ et on donne sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans le repère ci-contre.



QCM : choisir la bonne réponse parmi les propositions **1. 2. 3.**

Sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$, l'équation $\exp\left(f(x)\right) = 1$

1. admet une solution
2. admet deux solutions
3. n'admet aucune solution

Exercice 6.10

Le polonium 218 se désintègre naturellement et le nombre de noyaux de polonium 218 présents à un instant t donné est donné par la fonction N définie par : $N(t) = N_0 e^{-0{,}0037t}$.

Le temps t est exprimé en secondes et N_0 est le nombre de noyaux à l'instant initial $t = 0$.

1. Si $N_0 = 2 \times 10^{23}$, donner une estimation du nombre de noyaux restant au bout de 100 secondes, puis de 200 secondes.
2. Tracer la représentation graphique de cette fonction sur l'écran de la calculatrice sur l'intervalle $[0s\ ;\ 600s]$.
3. La demi-vie d'une substance radioactive est le temps au bout duquel la masse de cette substance a diminué de moitié.

   Déterminer la demi-vie du polonium à une seconde près. Expliquer sa démarche.

6.2 Dérivée de la fonction exponentielle.

Exercice 6.11

Calculer les dérivées des fonctions définies ci-dessous Chacune de ces fonctions est dérivable sur l'intervalle I indiqué.

1. $f(x) = -0,5\, e^x + 7 \quad I = \mathbb{R}$ **2.** $f(x) = x^3 - e^x \quad I = \mathbb{R}$ **3.** $f(x) = 3\, x\, e^x \quad I = \mathbb{R}$

4. $f(x) = \dfrac{4\, e^x}{x} \quad I =]0\ ;\ +\infty[$ **5.** $f(x) = \dfrac{2 - e^x}{e^x} \quad I = \mathbb{R}$

Exercice 6.12

Calculer les dérivées des fonctions définies ci-dessous.

1. $f(x) = (5x-2)\mathrm{e}^x$ **2.** $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x + 4}$ **3.** $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + 10}{x}$

Exercice 6.13

QCM : choisir la bonne réponse parmi les propositions **1. 2. 3.**.

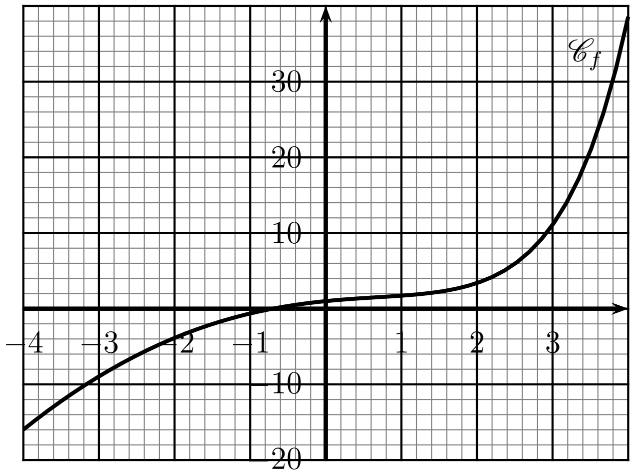
La fonction g définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x$ est la dérivée de la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par :

1. $\mathrm{G}(x) = \dfrac{x^2}{2}\mathrm{e}^x$ **2.** $\mathrm{G}(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$ **3.** $\mathrm{G}(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$

Exercice 6.14

La fonction f est définie sur l'intervalle $[-4\ ;\ 4]$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x^2$, et elle est représentée graphiquement ci-contre par la courbe $\mathscr{C}_f$. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[-4\ ;\ 4]$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. Placer sur la courbe $\mathscr{C}_f$ les points A et B d'abscisses respectives -2 et 3.
2. Calculer les coefficients directeurs les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A et en B. Arrondir les résultats à l'unité.
3. Tracer ces tangentes.



Exercice 6.15

La fonction f est définie sur l'intervalle $[-4\ ;\ 4]$ par $f(x) = (2x-7)\mathrm{e}^x$.

1. Calculer la dérivée.
2. Étudier le signe de la dérivée.
3. Dresser le tableau de variations. Indiquer les valeurs remarquables exactes.
4. Avec la calculatrice, tracer la courbe de cette fonction. Utiliser le tableau de variation pour bien régler les valeurs de la fenêtre.

Exercice 6.16

Même exercice que l'exercice 6.15 pour la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{2x+1}$.

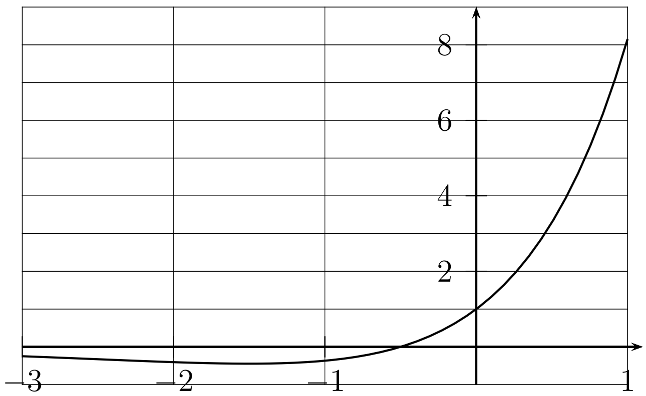
Exercice 6.17

Même exercice que l'exercice 6.15 pour la fonction f définie sur l'intervalle $[-4\ ;\ 1]$ par $f(x) = x^2\mathrm{e}^x$.

Exercice 6.18

La fonction f est définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 1]$ par $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^x$. La fonction f est représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous.

1. **a)** D'après la représentation graphique, combien la courbe $\mathscr{C}_f$ a-t-elle de tangentes qui passent par l'origine du repère ?
   b) Tracer approximativement ces tangentes.
   c) Quels sont approximativement les abscisses des points de contacts entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et ces tangentes.
2. Déterminer ces tangentes de manière exacte par des calculs.
   Indications :
   - Calculer la dérivée de f.
   - On appelle α l'abscisse d'un point A de la courbe $\mathscr{C}_f$.
   - Écrire l'équation réduite de la tangente en A en fonction de α.
   - Sachant que cette tangente passe par l'origine, écrire une équation d'inconnue α.
   - Calculer les abscisses exactes des points de contacts entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et ces tangentes.



6.3 Limites

6.3.a Limites en l'infini

Exercice 6.19 (limite de l'exponentielle en l'infini)

L'objectif de cet exercice est de déterminer les limites de e^x lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$. Le programme précise qu'un élève doit savoir justifier ces limites.

1. La fonction u est définie par : $u(x) = \mathrm{e}^x - x$.
   a) Calculer la dérivée.
   b) Étudier le signe de la dérivée.
   c) Dresser le tableau de variation de la fonction u sans les limites.
   d) En déduire que pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > x$.
2. Déterminer la limite de e^x lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Déterminer la limite de e^x lorsque x tend vers $-\infty$.
   Indication : pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-(-x)}$.

Exercice 6.20 (limites lorsque x tend vers l'infini, asymptotes)

1. Déterminer dans chaque cas la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction f.

a) $f(x) = \mathrm{e}^x + x$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ **c)** $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$

d) $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + \dfrac{1}{x^2+1}$ **e)** $f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$ **f)** $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$

2. Compléter le tableau ci-dessous. S'il y a une asymptote, donner son équation, sinon tracer une croix.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x))$						
Asymptote ?						
$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x))$						
Asymptote ?						

Exercice 6.21 (limites lorsque x tend vers l'infini)

Déterminer dans chaque cas la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction f.

1. $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x$ Indication : pour lever l'indétermination en $+\infty$, mettre e^x en facteur.

2. $f(x) = \dfrac{2-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$ Indication : pour lever l'indétermination en $+\infty$, mettre e^x en facteur au numérateur et au dénominateur.

6.3.b Trois autres limites à connaître

Exercice 6.22

L'étude des trois limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}\right)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(x\mathrm{e}^x)$ conduit à deux formes indéterminées.

Conjecturer les deux limites à l'aide de la calculatrice (tableau de valeurs et courbe). On admettra ces résultats.

Exercice 6.23

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^x - x)$

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}(\mathrm{e}^x - x)$. Indication : mettre d'abord x en facteur dans cette expression, lorsque $x \neq 0$.

Exercice 6.24

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}\Big((x-5)\mathrm{e}^{-x}\Big)$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big((x-5)\mathrm{e}^{-x}\Big)$. Indication : développer l'expression.

Exercice 6.25

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x+4}\right)$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x+4}\right)$. Indication : mettre d'abord x en facteur au dénominateur.

Exercice 6.26

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big((5x-4)\mathrm{e}^x\Big)$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}\Big((5x-4)\mathrm{e}^x\Big)$. Indication : développer d'abord l'expression.

Exercice 6.27

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}\Big(x\mathrm{e}^x-2x\Big)$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big(x\mathrm{e}^x-2x\Big)$. Indication : factoriser d'abord l'expression.

6.3.c Limites en un point

Exercice 6.28 (limites lorsque x tend vers a, asymptotes)

1. Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to0}(\mathrm{e}^x)$ **b)** $\lim\limits_{x\to3}(\mathrm{e}^x)$ **c)** $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x+4}}{x^2}\right)$ **d)** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x+5}}{x}\right)$

e) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x+5}}{x}\right)$ **f)** $\lim\limits_{x\to0}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\right)$ **g)** $\lim\limits_{\substack{x\to6\\x<6}}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x-6}\right)$

2. Compléter le tableau ci-dessous. S'il y a une asymptote, donner son équation, sinon tracer une croix.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
Limite							
Asymptote ?							

Exercice 6.29 (limites lorsque x tend vers a, asymptotes)

1. Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to10}(\mathrm{e}^x)$ **b)** $\lim\limits_{x\to-5}(\mathrm{e}^x)$ **c)** $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x-2}}{x^2}\right)$ **d)** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x+1}}{x}\right)$ **e)** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)$ **f)** $\lim\limits_{\substack{x\to7\\x>7}}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x-7}\right)$

2. Compléter le tableau ci-dessous. S'il y a une asymptote, donner son équation, sinon tracer une croix.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
Limite						
Asymptote ?						

Exercice 6.30

On sait d'après le cours sur les dérivées que le nombre dérivé d'une fonction f en a est $f'(a)$ et que $f'(a) = \lim_{h \to 0} \left(\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \right)$

Appliquer cela en remplaçant la fonction f par la fonction exponentielle, en remplaçant a par zéro, et h par x.

6.4 Études de fonctions

Exercice 6.31

La fonction f est définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

1. **a)** Déterminer les limites suivantes en justifiant : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (f(x))$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x))$

   b) En déduire la ou les asymptotes éventuelles. Donner l'équation chaque fois.
2. Calculer la dérivée de f.
3. Dresser le tableau de variation complet de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
4. Tracer la courbe à la calculatrice. Prendre : Xmin $= -0,1$ Xmax $= 5,5$ Xgrad $= 0,5$
   et régler convenablement Ymin, Ymax, Ygrad.

Exercice 6.32

La fonction f est définie par $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$ sur $\mathbb{R}$ c'est à dire sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$.

1. **a)** Déterminer les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers $+\infty$. Justifier.

   b) En déduire la ou les asymptotes éventuelles. Donner l'équation chaque fois.
2. Calculer la dérivée de f.
3. Dresser le tableau de variation complet de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. Tracer la courbe à la calculatrice. Prendre : Xmin $= -1$ Xmax $= 6$ Xgrad $= 1$
   et régler convenablement Ymin, Ymax, Ygrad.

6.5 Fonction e^u et phénomènes d'évolution

Avant de faire les exercices ci-dessous, lire le paragraphe du cours : *6.7 Dérivée de e^u*.

Exercice 6.33

Calculer la dérivée de chacune des fonctions définies ci-dessous.

1. $f(x) = e^{3x}$ **2.** $f(x) = 5e^{-0,7x}$ **3.** $f(x) = e^{x^2}$
4. $f(x) = e^{6x} + e^{-6x}$ **5.** $f(x) = x + e^{-x}$ **6.** $f(x) = -6x + e^{2x-3}$

Exercice 6.34

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$par $f(x) = (4x+3)e^{5x}$. Cette fonction est dérivable.

Calculer sa dérivée. On pourra utiliser les indications ci-dessous :

- Pour tout réel x, on pose : $u(x) = 4x + 3$ $v(x) = e^{5x}$ $w(x) = 5x$;
- Pour tout réel x, calculer $u'(x)$, $w'(x)$, puis $v'(x)$.
- Pour tout réel x, calculer $f'(x)$.

Exercice 6.35

Calculer la dérivée de chacune des fonctions définies ci-dessous.

1. $f(x) = xe^{-x}$ **2.** $f(x) = 5(x-2)e^{-0.4x}$ **3.** $f(x) = (x^2+1)e^{-3x}$

Exercice 6.36

La fonction f est définie pour tout réel par $f(x) = e^{5x}$

Parmi les fonctions ci-dessous, laquelle a pour dérivée la fonction f ?

1. $F(x) = e^{5x}$ **2.** $F(x) = \frac{1}{5}e^{5x} + 3$ **3.** $F(x) = 5e^{5x} + 3$

Exercice 6.37

QCM : choisir chaque fois la bonne réponse parmi les propositions **a) b) c)**.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-x+2)e^{-x}$.

1. L'équation $f(x) = 0$:

- **a)** n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$
- **b)** admet une seule solution dans $\mathbb{R}$
- **c)** admet deux solutions dans $\mathbb{R}$

2. L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est :

a) $y = -3x + 2$ **b)** $y = -x + 2$ **c)** $y = x + 2$

3. Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est :

a) $\frac{1}{e^3}$ **b)** $\frac{-1}{e^3}$ **c)** $\frac{1}{e^{-3}}$

Exercice 6.38

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = xe^{-x^2}$. Cette fonction est dérivable de dérivée f'.

1. a) Justifier que pour tout réel x $f(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\frac{e^{x^2}}{x^2}}$.

b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2. a) Pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, calculer $f'(x)$.

b) Étudier le signe de la dérivée.

3. Dresser le tableau de variation complet, en indiquant les valeurs remarquables exactes.

4. Tracer la courbe sur l'écran de la calculatrice, sur l'intervalle $[-0,5\ ;\ 3]$.

Exercice 6.39

Un médecin légiste arrive sur une scène de crime et mesure la température du corps et celle de la pièce. D'après la loi de Newton sur le refroidissement d'un corps, et avec les mesures prises sur place la température du corps en degrés Celsius, en fonction du temps t en heures est modélisée par : $T(t) = 12e^{-0{,}174t} + 20$.

1. Calculer la température du corps à l'arrivée du légiste.

2. Déterminer l'heure du crime, en expliquant sa démarche.

3. a) Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} \big(f(t)\big)$.
   b) Que signifie ce résultat ?
4. Étudier les variations de f depuis l'heure du crime, jusqu'à $+\infty$.
5. Dresser le tableau de variation complet de f.

Exercice 6.40

Suite à un accident industriel, un gaz se répand dans un local d'usine.

L'évolution du taux de gaz dans l'air peut être modélisé grâce à la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par : $\quad f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}$

où x est le nombre de minutes écoulées depuis l'accident et $f(x)$ le taux de gaz dans l'air exprimé en parties pour million (ppm).

Le plan est muni d'un repère orthogonal. La courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,7]$ est donnée plus bas.

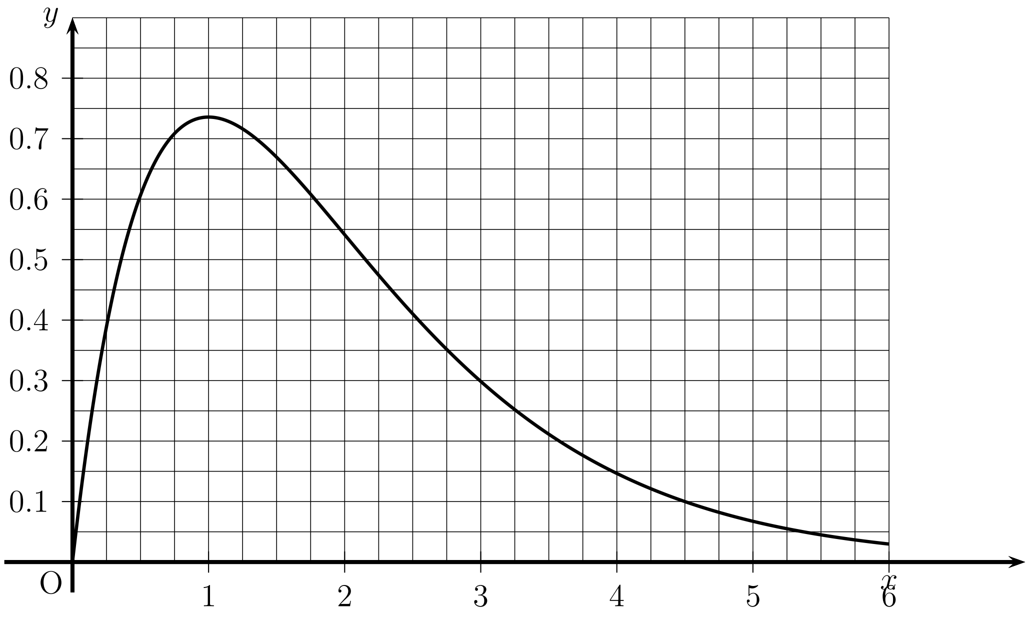
Partie A

Répondre aux questions suivantes à l'aide de la courbe représentative de f avec la précision permise permises par le graphique.

1. Après combien de minutes le taux de gaz est-il maximum ? Quel est ce taux maximum ?
2. À partir de combien de minutes, le taux de gaz dans l'air est-il négligeable, c'est à dire inférieur ou égal à $0,08$ ppm ?

Partie B

1. a) On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe pour x élément de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   b) Donner le tableau complet des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   c) Après combien de minutes le taux de gaz est-il maximum ? Quel est ce taux maximum ? Justifier.
2. On rappelle que le taux de gaz dans l'air est négligeable lorsqu'il est inférieur ou égal à $0,08$ ppm.
   a) Calculer $f(6)$ et arrondir le résultat au centième près.
   b) Justifier que l'équation $\quad f(x) = 0,08 \quad$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1\,;\,6]$.
   c) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude $0,001$.



Exercice 6.41

L'objectif de cet exercice est d'étudier deux fonctions, puis d'étudier laquelle modélise le mieux une situation.

Les fonctions f et g sont définies sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = 97,4\,\mathrm{e}^{0,084x}$ $g(x) = \dfrac{992}{1+12,3\mathrm{e}^{-0,155x}}$

Partie A

Pour chacune de ces deux fonctions, répondre aux questions ci-dessous.

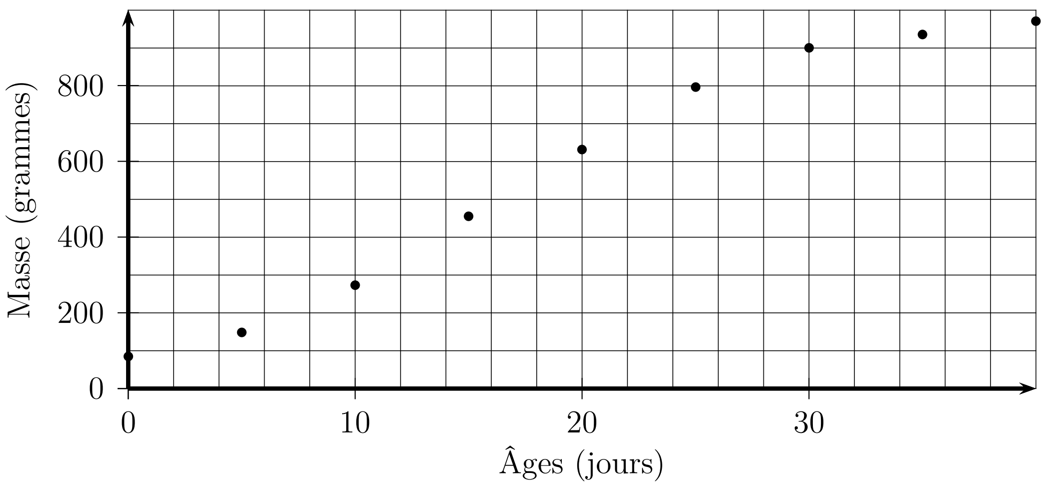
1. **a)** Déterminer la limite de la fonction lorsque x tend vers $+\infty$.
   b) La courbe représentative admet-elle une asymptote ? Si la réponse est oui, donner son équation.
2. Étudier le sens de variation de la fonction sur $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Dresser le tableau complet de variation de la fonction sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie B

Le tableau suivant indique l'évolution de la masse d'un goéland. et les points correspondants sont placés dans un repère plus bas.

Âge (jours)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Masse (grammes)	85	148	273	455	631	796	900	935	970

1. Quelle fonction modélise le mieux la situation ? Justifier.
2. Expliquer aussi pourquoi un des deux modèles n'est pas réaliste.



Exercice 6.42

Une étude montre que la probabilité d'avoir un problème cardiaque en fonction de son âge x en années est : $f(x) = \dfrac{1}{1+15,2\mathrm{e}^{-0,054x}}$.

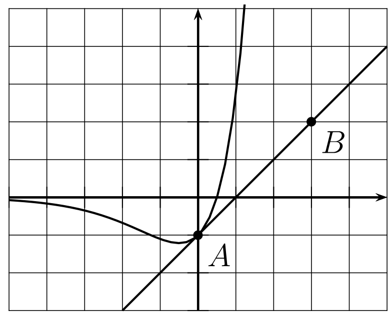
1. Étudier les variations de cette fonction sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2. **a)** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)\big)$.
   b) Que signifie ce résultat ?
3. À partir de quel âge la probabilité d'avoir un problème cardiaque est-elle supérieure à 0,5 ? Expliquer sa démarche.

6.6 Autres exercices

Exercice 6.43

La fonction f, est définie sous la forme $f(x) = (ax + b)\,\mathrm{e}^x$, et elle représentée ci-contre par la courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé d'unité 0,5 cm.

Les coordonnées des points A et B sont respectivement $A\ (0\ ;\ -1)$ et $B\ (3\ ;\ 2)$. Le point A appartient à la courbe $\mathscr{C}$, et la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en A est la droite (AB).



1. Justifier par un calcul que pour tout réel x, $f'(x) = (ax + a + b)\,\mathrm{e}^x$.

2. Déterminer a et b en justifiant.

Exercice 6.44

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n pour tout réel x de l'intervalle $[-2\ ;\ 1]$ par : $f_n(x) = \mathrm{e}^{nx}$.

On note $\mathscr{C}_n$ la représentation graphique de la fonction f_n dans un repère orthogonal.

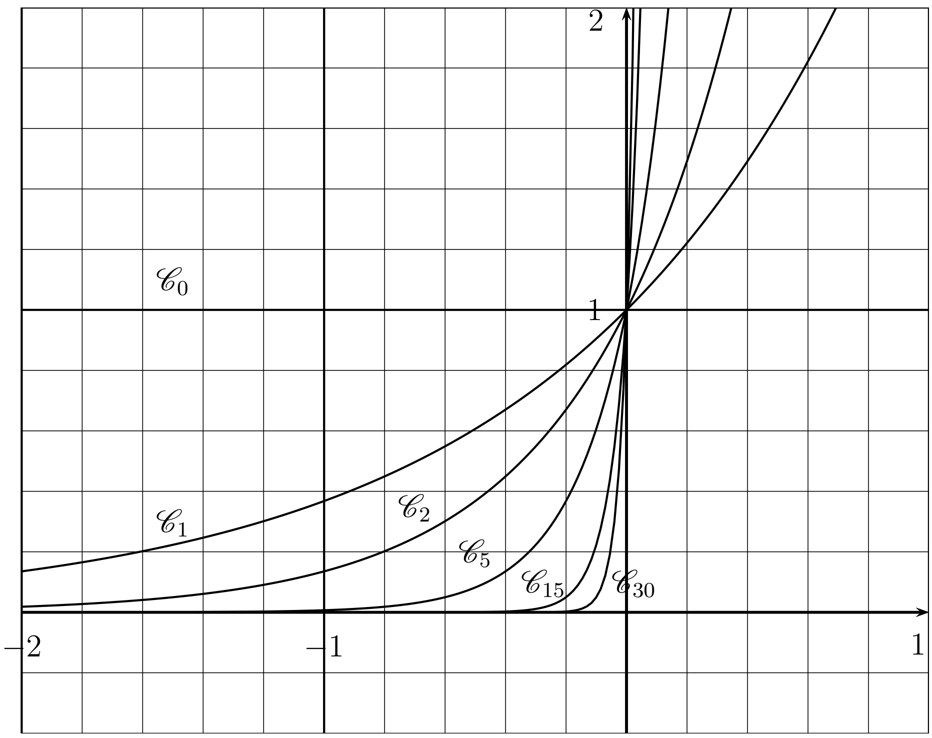
Quelques-unes des courbes $\mathscr{C}_n$ sont représentées ci-dessous.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction f_n est croissante et positive sur l'intervalle $[-2\ ;\ 1]$.

2. Montrer que les courbes $\mathscr{C}_n$ ont toutes un point commun A, et préciser ses coordonnées.

3. À l'aide des représentations graphiques, peut-on conjecturer le comportement des coefficients directeurs des tangentes en A aux courbes $\mathscr{C}_n$ pour les grandes valeurs de n ?

Démontrer cette conjecture.



6.7 Pour réviser

Chapitre 1 – Exponentielle

Rubrique *Pour s'exercer*, corrigés page 463

- ex 3 et 5 p 17 : à propos de la définition de la fonction exponentielle
- ex 9 et 12 p 19 : simplifier des expresssions, calculs
- ex 18, 20 p 21 : $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ étude de cette fonction, tangentes

Rubrique *Objectif bac*, corrigés page 470

- ex 74 p 29 (QCM) : calcul, limite, dérivée, tangente
- ex 75 p 29 (Vrai/Faux) : calcul, limite, dérivée, tangente
- ex 76 p 29 (Vrai/Faux) : courbe, tangente, variations
- ex 77 p 30 : étude du signe d'une fonction auxiliaire
- pour étudier les variations d'une fonction, équation $f(x) = 0$
- ex 78 p 31 : fonction, dérivée, variations, tangente, limites, position relative de la courbe et d'une droite
- ex 79 p 31 : étude d'un phénomène d'évolution, le processus d'élimination d'un médicament

Chapitre 4 – Limites de fonctions

Rubrique *Pour s'exercer*, corrigés page 464

- ex 27, 30 p 99 : limites et comparaisons
- ex 35, 36 p 101 : limites

Rubrique *Objectif bac*, corrigés page 472

- ex 98 4) 5) p 107 (Vrai/Faux) : limites
- ex 100 p 108 : famille de fonctions, problème complet de type bac
- ex 101 p 109 : une limite simple, une forme indéterminée, une démonstration de cours.

Pour réviser les démonstrations de cours

Les exercices suivants ne sont pas corrigés en fin de livre, mais dans le cours sur fiche ou dans le livre. Ils sont signalés par la mention *ROC* qui veut dire *Restitution Organisée de Connaissances.*

Ex 34 p 25, ex 42 p 26, ex 59 p 27.

II Cours

6.1 Définition et conséquences

Propriété 6.1 (admise)

- On admet l'existence d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$.
- Cette fonction f est dérivable, et donc continue.

Le programme précise qu'un élève doit savoir démontrer la propriété ci-dessous.

Propriété 6.2

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Démonstration (à connaître)

➜ **Démontrons d'abord que pour tout réel x, $f(x) \neq 0$.**

On appelle g la fonction définie par : $g(x) = f(x) \times f(-x)$.

Nous allons démontrer que cette fonction g est constante, pour cela, calculons la dérivée de g :

Pour tout réel x, on a : $g'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times (-f'(-x)) = f'(x) \times f(-x) - f(x) \times f'(-x)$

or : $f'(x) = f(x)$ et $f'(-x) = f(-x)$

donc : $g'(x) = 0$

or, une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée nulle, est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

Donc la fonction g est constante.

Calculons maintenant $g(0)$: $g(0) = f(0) \times f(0) = 1$

Puisque la fonction est constante et puisque $g(0) = 1$, on peut affirmer que pour tout réel x, $g(x) = 1$.

Cela signifie que pour tout réel x, $f(x) \times f(-x) = 1$.

Par conséquent pour tout réel x, $f(x)$ est différent de zéro.

➜ **Démontrons qu'il existe une unique fonction telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$.**

Supposons qu'il existe deux fonctions f_1 et f_2 telles que $f_1' = f_1$ et $f_1(0) = 1$ et $f_2' = f_2$ et $f_2(0) = 1$.

Nommons h la fonction définie par $h(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$.

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, puisque d'après la propriété précédente, pour tout réel x, $f_2(x)$ est différent de zéro.

Puisque les fonctions f_1 et f_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que la fonction f_2 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Calculons sa dérivée. Pour tout réel x, on a :

$h'(x) = \dfrac{f_1'(x)f_2(x) - f_1(x)f_2'(x)}{(f_2(x))^2}$ or $f_1'(x) = f_1(x)$ et $f_2'(x) = f_2(x)$

Donc : $h'(x) = \dfrac{f_1(x)f_2(x) - f_1(x)f_2(x)}{(f_2(x))^2} = 0$

Par conséquent la fonction h est constante et égale à $h(0)$.

Or : $h(0) = \dfrac{f_1(0)}{f_2(0)} = 1$

Nous avons prouvé que pour tout réel x, $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1$, autrement dit $f_1(x) = f_2(x)$.

Ainsi, il existe bien une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Définition 6.1

L'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$ est appellée la fonction **exponentielle** et on la note **exp**.

D'après les propriétés 6.1 et 6.2 nous en déduisons la propriété ci-dessous.

Propriété 6.3

- La fonction exp est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$.
- Pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$.
- Pour tout réel x, $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

Les propriétés démontrées précédemment nous permettent d'en dire un peu plus sur la fonction exponentielle.

En fait, on sait que cette fonction ne s'annule pas, et comme $\exp(0) = 1$, pour tout réel x, $\exp(x) > 0$, en effet, il ne peut y avoir un réel a tel que $\exp(a) < 0$, car sinon d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existerait un nombre α entre 0 et a tel que $\exp(\alpha) = 0$, ce qui est impossible.

Donc la fonction exp est strictement positive sur $\mathbb{R}$, or elle est égale à sa dérivée, donc sa dérivée est aussi strictement positive sur $\mathbb{R}$. D'où finalement la propriété ci-dessous.

Propriété 6.4

- La fonction exp est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

6.2 Relation fonctionnelle, notation e^x

On peut démontrer la propriété ci-dessous, qui est la propriété fondamentale de calcul de l'exponentielle.

Sa démonstration n'est pas exigible, c'est pourquoi elle n'apparaît pas dans ce cours. Cette démonstration est traitée dans l'exercice résolu n° 1 page 17 du manuel Hyperbole de TS, Nathan 2012.

Propriété 6.5 (relation fonctionnelle)

Pour tous réels x et y , $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.

Cette propriété va nous permettre d'écrire l'exponentielle d'un nombre sous une autre forme, en effet appelons e le nombre $\exp(1)$.

On a alors : $\exp(2) = \exp(1 + 1) = \exp(1) \times \exp(1) = e^2$, et de même $\exp(3) = e^3$, $\exp(4) = e^4$, etc.

En fait, par récurrence, on peut démontrer que pour tout entier naturel n, $\exp(n) = e^n$.

On admettra qu'on peut étendre cette écriture à tous les nombres réels et on retiendra la propriété ci-dessous.

Propriété 6.6

On appelle e le nombre $\exp(1)$: $e = \exp(1) \approx 2,718$ et pour tout réel x, on a : $\exp(x) = e^x$

Remarque – Lien avec les suites géométriques

Il est indiqué ci-dessus que pour tout entier naturel n, $\exp(n) = \mathrm{e}^n$, or la suite (e^n) est une suite géométrique.

En fait, pour tout réel q positif on connaît la suite géométrique (q^n), mais on peut aussi définir la fonction f définie par $f(x) = q^x$, et cette fonction a des propriétés analogues à celle de la fonction exponentielle.

6.3 La fonction exponentielle

Récapitulons ci-dessous ce que l'on sait sur la fonction exponentielle.

Les propriétés de calculs reprennent deux propriétés précédentes et sont complétées par trois formules.

Propriété 6.7 (expression, signe, dérivée, variations)

- La fonction exponentielle est définie par : $f(x) = \mathrm{e}^x$
- $\mathrm{e} \approx 2,718$
- Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$
- Sa dérivée est définie par : $f'(x) = \mathrm{e}^x$
- La fonction exponentielle est strictement croissante.
  Pour tous réels x et y, $x < y \iff \mathrm{e}^x < \mathrm{e}^y$ et $x = y \iff \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y$

Propriété 6.8 (propriétés de calculs)

Pour tous réels x et y ,

$$\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x} \qquad \mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y \qquad \mathrm{e}^{x-y} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y} \qquad (\mathrm{e}^x)^y = \mathrm{e}^{xy} \qquad \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}^x}$$

Le programme précise qu'un élève doit savoir utiliser les propriétés ci-dessus pour transformer une écriture.

6.4 Utilisation de la calculatrice

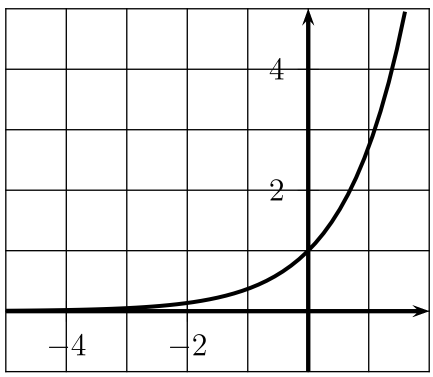
TI 82 :

- pour le nombre e : $\boxed{\text{2nde}}$ [e]
- pour l'exponentielle d'un nombre : $\boxed{\text{2nde}}$ [e^x]

CASIO : $\boxed{\text{SHIFT}}$ [e^x]

6.5 Représentation graphique

Le programme indique qu'un élève doit connaître le sens de variation et la représentation graphique de la fonction exponentielle.



6.6 Limites

6.6.a Limites en l'infini

Le programme précise qu'un élève doit savoir démontrer la propriété ci-dessous.

Propriété 6.9

$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$

Démonstration (à connaître)

➜ **Démontrons d'abord que pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > x$.**

On appelle u la fonction définie par : $u(x) = \mathrm{e}^x - x$.

Calculons sa dérivée : pour tout réel x, $u'(x) = \mathrm{e}^x - 1$.

Or on sait que la fonction exponentielle est strictement croissante par conséquent :

si $x \leqslant 0$, alors $\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^0$, et si $x \geqslant 0$, alors $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^0$.

Or $\mathrm{e}^0 = 1$, donc : si $x \leqslant 0$, alors $\mathrm{e}^x \leqslant 1$, et si $x \geqslant 0$, alors $\mathrm{e}^x \geqslant 1$.

Par conséquent : si $x \leqslant 0$, alors $u'(x) \leqslant 0$, et si $x \geqslant 0$, alors $u'(x) \geqslant 0$.

On obtient ainsi le tableau de variations ci-dessous.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	
$u(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

D'après ce tableau, la fonction u admet un minimum égal à 1, par conséquent, pour tout réel x : $u(x) > 0$, autrement dit $\mathrm{e}^x - x > 0$, c'est à dire $\mathrm{e}^x > x$.

➜ **Démontrons que : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\mathrm{e}^x) = +\infty$**

Nous avons démontré que pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > x$, or $\lim\limits_{x\to+\infty}(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(\mathrm{e}^x) = +\infty$.

➜ **Démontrons que : $\lim\limits_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^x) = 0$**

Pour tout réel x, on a : $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-(-x)} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}}$.

Lorsque x tend vers $-\infty$, $-x$ tend vers $+\infty$, par conséquent $\lim\limits_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^{-x}) = +\infty$.

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}}\right) = 0$, autrement dit, on obtient bien : $\lim\limits_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^x) = 0$.

6.6.b Trois autres limites à connaître

Le programme précise qu'un élève doit connaître et exploiter la première et la troisième limites ci-dessous. La deuxième n'est pas explicitement au programme, mais elle est souvent utilisée.

Propriété 6.10

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(x\mathrm{e}^x) = 0$

6.6.c Nombre dérivé de l'exponentielle en zéro

Un commentaire du programme préconise de faire le lien entre le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 et la limite en 0 de $\dfrac{e^x - 1}{x}$.

Propriété 6.11

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\right) = \exp'(0) = 1$$

Explications

On sait d'après le cours sur les dérivées que le nombre dérivé d'une fonction f en a est $f'(a)$ et que $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}\right)$

Appliquons cela en remplaçant la fonction f par la fonction exponentielle, en remplaçant a par zéro, et h par x.

Cela nous donne : $\exp'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\exp(0+x) - \exp(0)}{x}\right)$ or $\exp'(0) = \exp(0) = \mathrm{e}^0 = 1$.

On obtient donc bien : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\right) = \exp'(0) = 1$.

6.7 Dérivée de e^u

Propriété 6.12

Si la fonction u est dérivable sur un intervalle, alors la fonction définie par $f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable sur cet intervalle et sa dérivée est donnée par : $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$

Remarque

Un commentaire du programme préconise d'étudier des exemples de fonctions de la forme e^u notamment des fonctions définies sous la forme $f(x) = \mathrm{e}^{-kx}$ ou $f(x) = \mathrm{e}^{-kx^2}$ $(k > 0)$, qui sont utilisées dans des domaines variés.

Ces fonctions figurent souvent dans les exercices de bac, et une fonction de ce type est utilisée dans le chapitre de probabilité intitulé *Loi normale*.

Certains exercices font donc appel à des fonctions de ce type.