Exercice résolu

La fonction f est définie par $f(x) = x^3 + x$ sur $\mathbb{R}$ c'est à dire sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$.

On veut déterminer une valeur approchée au millième près de l'équation $f(x) = 500$.

1. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur $[0\ ;\ 10]$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 500$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 10]$.
3. Avec la calculatrice, déterminer une valeur approchée de α au millième près.

Corrigé

1. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur $[0\ ;\ 10]$.
   $f'(x) = 3\,x^2 + 1$, or $x^2 \geqslant 0$ donc $3x^2 \geqslant 0$ donc $3\,x^2 + 1 > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et aussi sur $[0\ ;\ 10]$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 500$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 10]$.
   $f(0) = 0^3 + 0 = 0$ et $f(10) = 1\,000^3 + 10 = 1\,010$, donc 500 est compris entre $f(0)$ et $f(10)$.
   D'autre part, la fonction f est continue sur $[0\ ;\ 10]$ parce que c'est une fonction polynôme.
   Nous savons donc que :
   - la fonction f est strictement croissante sur $[0\ ;\ 10]$;
   - la fonction f est continue sur $[0\ ;\ 10]$;
   - 500 est compris entre $f(0)$ et $f(10)$;

   par conséquent, d'après le théorème de la valeur intermédiaire l'équation $f(x) = 500$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 10]$.
3. Avec la calculatrice, déterminer une valeur approchée de α au millième près.

   Appuyer sur math, puis descendre jusqu'à `Solveur ...`, et valider.
   On voit :
   ```
   SOLVEUR EQUATION
   eqn:0=
   ```
   et sinon remonter sur la première ligne avec ↑
   L'équation à résoudre est $x^3 + x = 500$, or : $x^3 + x = 500 \iff x^3 + x - 500 = 0$
   On complète donc ainsi :
   `eqn:0=X∧3+X-500` ⟵ l'équation $f(x) = k$ doit être transformée en $f(x) - k = 0$
   puis on valide avec la touche entrer
   On voit alors
   ```
   eqn:0=X∧3+X-500
     X=
   ```
   Compléter ainsi :
   ```
   eqn:0=X∧3+X-500
     X=0
   ```
   ⟵ on saisit une valeur de x assez proche de α.
   On appuie sur alpha [résol]
   On obtient : $\alpha \approx \boxed{7,895}$.