Table des matières

Première partie

Livre de l'élève

Chapitre 1

Suites

I Exercices

1.1 Rappels de 1re S, suites arithmétiques et géométriques

Les exercices suivants permettent de revoir ce qui a été étudié sur les suites en première S. Cela est rappelé dans le cours à partir de la page 23, aux paragraphes 1.1.b, 1.2, 1.3.

Exercice 1.1

1. La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n par $u_n = 5n + 2$.

a) Calculer u_0, u_1, u_2.

b) Justifier si la suite (u_n) est arithmétique, géométrique ou ni l'une ni l'autre.

2. Mêmes consignes a) et b) pour la suite (u_n) définie par $u_n = n^2 + 1$.

3. Mêmes consignes a) et b) pour la suite (u_n) définie par $u_n = 7 \times 3^n$.

Exercice 1.2

1. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 4$ pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

a) Calculer u_1, u_2.

b) Justifier si la suite (u_n) est arithmétique, géométrique ou ni l'une ni l'autre.

2. Mêmes consignes a) et b) pour la suite (u_n) définie par $u_0 = 100$ et $u_{n+1} = 0,8u_n$.

3. Mêmes consignes a) et b) pour la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n + 1,5$.

Exercice 1.3

1. La suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = -2$ et de raison 0,5.
Calculer u_{15}, puis calculer la somme $S = u_0 + \cdots + u_{15}$.

2. La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 50$ et de raison 0,9.
Calculer la somme $S = u_0 + \cdots + u_{10}$. Arrondir au centième près.

Exercice 1.4

1. La suite (u_n) est définie par $u_1 = 1$ pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

a) Calculer u_2, u_3.

b) Justifier si la suite (u_n) est arithmétique, géométrique ou ni l'une ni l'autre.

2. La suite (u_n) est arithmétique, de premier terme $u_1 = 5$ de raison 3,5.
Calculer u_{20} et calculer la somme $S = u_1 + \cdots + u_{20}$.

3. La suite (u_n) est géométrique, de premier terme $u_1 = 9$ et de raison 0,7. Écrire l'expression de u_n en fonction de n.

4. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 1{,}2\,u_n$.

a) Écrire l'expression de u_n en fonction de n en justifiant.

b) Calculer la somme $S = u_0 + \cdots + u_{18}$. Arrondir au centième près.

Exercice 1.5

Pour tout entier naturel n, les suites (u_n) et (v_n) sont définies par : $u_n = 3n^2 + 5n - 7$ et $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = 4v_n + 8$

Le tableau ci-contre est extrait d'une feuille de calcul d'un tableur, et indique des valeurs des termes de ces deux suites.

	A	B	C
1	n	Un	Vn
2	0	-7	2
3	1	1	16
4	2	15	72

1. Quelle est la formule à saisir dans la cellule B2 et à recopier vers le bas, qui permette d'obtenir les termes successifs de la suite (u_n) ?

2. Quelle est la formule à saisir dans la cellule C3 et à recopier vers le bas, qui permette d'obtenir les termes successifs de la suite (v_n).

Exercice 1.6

Dans l'algorithme ci-contre, la variable u est un nombre réel et les variables k et n sont des entiers naturels.

```
u ← 2
Pour k allant de 1 à n
    u ← 0,8u + 1
Fin du Pour
```

1. Quelle est la valeur finale de u lorsque $n = 3$ quand on exécute cet algorithme ?
Détailler les calculs sans arrondir.

2. Trois suites sont définies ci-dessous. Quelle est la suite pour laquelle l'algorithme précédent permet de calculer u_n ?

$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 0,8u_n + 1$ $\qquad$ $u_n = 0,8n + 1$ $\qquad$ $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 0,8u_n + 1$

Exercice 1.7

1. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = u_n - n + 1$.
Calculer u_1, u_2, u_3, u_4.

2. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.
Calculer u_1, u_2, u_3, u_4.

Les deux exercices suivants font intervenir des pourcentages d'augmentation ou de réduction, que l'on appelle taux d'évolution. Dans le cours, on pourra consulter le paragraphe 1.3.c page 26.

Exercice 1.8

Une source sonore émet un son dont l'intensité est de 1 000 décibels.

Une plaque d'isolation phonique d'un certain type absorbe 45 % de l'intensité du son. On note u_n l'intensité du son, mesuré en décibels, après la traversée de n plaques d'isolation phonique. Ainsi $u_0 = 1\,000$.

1. Calculer les trois termes suivants de la suite.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,55u_n$. En déduire que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
3. Donner l'expression de u_n en fonction de n.
4. Déterminer à l'aide de la calculatrice le nombre minimum de plaques que doit traverser le son pour que l'intensité soit inférieure au dixième de sa valeur initiale.

Exercice 1.9

La population d'une ville augmente régulièrement de 10 % par an. En 2000, elle était de 8 000 habitants.

On désigne par u_n le nombre théorique d'habitants estimé pour l'année $(2000 + n)$. On a donc $u_0 = 8\,000$.

1. Calculer les termes u_1 et u_2.
2. Exprimer le terme u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire l'expression de u_n en fonction de n.
3. Calculer le nombre d'habitants prévu pour 2006.
4. À partir de quelle année la population aura dépassé le double de la population en 2000 ? Justifier.

Exercice 1.10

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 5$

1. Calculer les termes u_1 et u_2.
2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier.
3. La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n + 10$.
   a) Établir une relation entre v_n et v_{n+1}. En déduire que (v_n) est géométrique et préciser ses caractéristiques.
   Pour répondre à cette question, on peut lire le paragraphe du cours 1.3.d page 27.
   b) Déterminer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.
4. Calculer u_{10}. Arrondir à 10^{-2} près.

Exercice 1.11

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 7$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 4$

1. La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 2$.
   a) Établir une relation entre v_n et v_{n+1}. En déduire que (v_n) est géométrique et préciser ses caractéristiques
   b) Déterminer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.
2. Calculer u_{12}.

1.2 Raisonnement par récurrence

Exercice 1.12

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.
2. D'après ces valeurs de u_n, quelle semble être la formule qui donne u_n en fonction de n ?
3. Cette formule est-elle vraie pour $n = 0$?

4. Justifier que si cette formule est vraie pour u_n utiliser la relation de récurrence pour justifier que cette formule est vraie pour u_{n+1}.

Ce qui a été fait aux questions 3 et 4 ci-dessus s'appelle un **raisonnement par récurrence**.
Voir cours 1.4.

Exercice 1.13

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2(n+1)$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = n^2 + n$.

Exercice 1.14

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n - 2$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = n^2 - 3n + 1$.

Exercice 1.15

La suite (u_n) est définie par $u_1 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$.

1. Calculer u_2, u_3, u_4 sous forme de fractions.

2. Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n.

3. Démontrer par récurrence que cette expression est vraie pour tout entier naturel n.

Exercice 1.16

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 2^{n+2} - 3$

Exercice 1.17

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 3u_n - 4$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 6 \times 3^n + 2$

Exercice 1.18

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 5u_n - 8$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.

2. D'après ces valeurs de u_n, quelle semble être la formule qui donne u_n en fonction de n ? Autrement dit, conjecturer la formule.

3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 1.19

Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, (u_n) est le nombre de segments qui relient n points A_1, A_2, A_3, $\ldots$, A_n.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$

Exercice 1.20

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1.3 Sens de variation d'une suite numérique.

Exercice 1.21

Justifier le sens de variation de chacune des suites définies ci-dessous.

Voir les rappels de première S dans le cours, paragraphe 1.5 *Sens de variation d'une suite numérique.*

1. $u_n = -3n + 4$ **2.** $u_n = 5 \times 1,2^n$ **3.** $u_n = 0,9^n$ **4.** $u_n = n^3 + n$

Exercice 1.22

Justifier le sens de variation de chacune des suites définies ci-dessous.

1. $u_n = -5 \times 1,03^n$ **2.** $u_n = 5n - 2$ **3.** $u_n = 2 \times 0,85^n$ **4.** $u_n = \dfrac{3n}{n+1}$

Exercice 1.23

1. On admet que chacune des suites définies dans le tableau ci-dessous est de signe constant et de sens de variation constant (monotone).
   Sans justifier, indiquer le signe et le sens de variation de chacune de ces suites.

Suite	**Signe**	**Sens de variation**
$u_n = \dfrac{1}{n+1}$		
$u_n = -3n - 4$		
$u_n = 1,5^n$		
$u_n = (-8) \times 0,5^n$		

2. Indiquer si chacune de ces affirmations est vraie ou fausse. Si c'est vrai, justifier, sinon donner un exemple.
   Affirmation 1 : si une suite est positive, alors elle est croissante.
   Affirmation 2 : si une suite est croissante , alors elle est positive.
   Affirmation 3 : si une suite est négative, alors elle est décroissante.
   Affirmation 4 : si une suite est décroissante, alors elle est négative.

Exercice 1.24

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3.
2. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).
3. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante. Pour cela, démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1}$.

Exercice 1.25

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 5 - \dfrac{1}{u_n}$.

1. On appelle f la fonction définie par $f(x) = 5 - \dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   Déterminer le sens de variation de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 1.26

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{4 + u_n^2}$.

1. On appelle g la fonction définie par $g(x) = 4 + x^2$ sur l'intervalle $]0 ~;~ +\infty[$.
   Déterminer le sens de variation de f sur $]0 ~;~ +\infty[$.
2. On appelle f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{4 + x^2}$ sur l'intervalle $]0 ~;~ +\infty[$.
   Déterminer le sens de variation de f sur $]0 ~;~ +\infty[$.
3. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

1.4 Suite majorée, minorée, bornée

Lire d'abord dans le cours la signification des expressions *suite majorée*, *suite minorée*, *suite bornée* au paragraphe 1.6 *Suite majorée, minorée, bornée*

Exercice 1.27

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2$

1. La suite (u_n) est-t-elle minorée ? Si oui, par quel nombre ? Justifier
2. La suite (u_n) est-t-elle majorée ? Si oui, par quel nombre ?
3. La suite (u_n) est-t-elle bornée ?

Exercice 1.28

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = -5n - 7$

1. La suite (u_n) est-t-elle minorée ? Si oui, par quel nombre ?
2. La suite (u_n) est-t-elle majorée ? Si oui, par quel nombre ? Justifier.
3. La suite (u_n) est-t-elle bornée ?

Exercice 1.29

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$

1. La suite (u_n) est-t-elle minorée ? Si oui, par quel nombre ? Justifier.
2. La suite (u_n) est-t-elle majorée ? Si oui, par quel nombre ? Justifier.
3. La suite (u_n) est-t-elle bornée ?

Exercice 1.30

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 10n + 120$.

1. **a)** La suite (u_n) semble-t-elle minorée ? Si oui, par quel nombre ? Répondre sans justifier en utilisant la calculatrice.
   b) Démontrer la réponse précédente.
2. La suite (u_n) semble-t-elle majorée ? Si oui, par quel nombre ? Répondre sans justifier en utilisant la calculatrice.
3. La suite (u_n) est-t-elle bornée ?

Exercice 1.31

Pour chacune des suites définies ci-dessous, indiquer si cette suite est bornée. Justifier sa réponse.

1. $u_n = 0,6^n$ **2.** $u_n = (-1)^n$

Exercice 1.32

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 5u_n + 4$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$

Exercice 1.33

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$

Exercice 1.34

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 2$.
2. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante. Pour cela, démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.

1.5 Limite finie ou infinie d'une suite

Exercice 1.35

En utilisant la calculatrice ou le tableur, indiquer sans justifier quel semble être le comportement à l'infini de chacune de ces suites.

1. $u_n = n^3 + 6$ **2.** $u_n = (-1,2)^n$ **3.** $u_n = \dfrac{8n+5}{n}$ **4.** $u_n = \sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$

Exercice 1.36

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = 5 + \dfrac{1}{n}$.

1. À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, quelle semble être la limite ℓ de cette suite ?
2. D'après la définition du cours, dire qu'une suite (u_n) tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$, signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.
   - **a)** Déterminer le rang N à partir duquel toutes les valeurs u_n sont dans l'intervalle $]\ell - 0,1\ ;\ \ell + 0,1[$. Justifier.
   - **b)** Même question pour $]\ell - 0,001\ ;\ \ell + 0,001[$.

Exercice 1.37

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = 7 + \dfrac{1}{n^2}$.

1. À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, quelle semble être la limite ℓ de cette suite ?
2. Déterminer le rang N à partir duquel toutes les valeurs u_n sont dans l'intervalle $]\ell - 0{,}000\,1\ ;\ \ell + 0{,}000\,1[$. Justifier.

Exercice 1.38

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = \dfrac{5}{\sqrt{n}}$.

1. À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, quelle semble être la limite ℓ de cette suite ?
2. Déterminer le rang N à partir duquel toutes les valeurs u_n sont dans l'intervalle $]\ell - 0{,}05\ ;\ \ell + 0{,}05[$. Justifier.

Exercice 1.39

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = \dfrac{1}{n^3}$.

1. À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, quelle semble être la limite ℓ de cette suite ?
2. Déterminer le rang N à partir duquel toutes les valeurs u_n sont dans l'intervalle $]\ell - 0{,}001\ ;\ \ell + 0{,}001[$. Justifier.

Exercice 1.40

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = n^2 - 100$.

1. À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, quelle semble être la limite de cette suite ?
2. D'après la définition du cours, dire qu'une suite (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ signifie que : tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.

   On choisit $A = 1\,000$. Déterminer le rang N à partir duquel toutes les valeurs u_n sont dans l'intervalle $]1\,000\ ;\ +\infty[$. Justifier.

1.6 Limite d'une suite et algorithmique

Le programme précise que, pour une suite (u_n) croissante qui tend vers $+\infty$ et un nombre réel A, un élève de terminale S doit savoir déterminer à l'aide d'un algorithme un rang à partir duquel u_n est supérieur à A.

Exercice 1.41

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = n^3 + 1\,000\,n$.

1. **a)** Justifier que la fonction f définie par $f(x) = x^3 + 1\,000x$ est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   b) Qu'en déduit-on pour la suite (u_n) ?
2. À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, quelle semble être la limite de cette suite ?
3. Déterminer le rang N à partir duquel toutes les valeurs u_n sont dans l'intervalle $]20\,000\ ;\ +\infty[$.
4. Écrire un algorithme qui permet à partir d'un nombre A de déterminer le rang N à partir duquel toutes les valeurs u_n sont dans l'intervalle $]A\ ;\ +\infty[$.

   On pourra lire dans le cours le paragraphe 1.8 page 32.
5. Programmer cet algorithme à la calculatrice ou en Python 3, et le tester en utilisant la réponse à la question **3.**

Exercice 1.42

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = n^3 - 3n^2 + 4$.

1. À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, vérifier que la limite de cette suite est $+\infty$.
2. Déterminer sans justifier le rang N à partir duquel toutes les valeurs u_n sont dans l'intervalle $]1\,000\,000\ ;\ +\infty[$. On pourra adapter le programme de l'exercice 1.41.

1.7 Suites de référence

Exercice 1.43

Sans justifier, donner la limite de chacune des suites définies ci-dessous.

On appelle ces suites des ***suites de référence*** *et leur limite lorsque n tend vers $+\infty$ doit être connue.*

1. $u_n = \dfrac{1}{n}$ **2.** $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ **3.** $u_n = \dfrac{1}{n^3}$ **4.** $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

5. $u_n = n$ **6.** $u_n = n^2$ **7.** $u_n = n^3$ **8.** $u_n = \sqrt{n}$

1.8 Opérations sur les limites

Exercice 1.44

L'objectif de cet exercice est de déterminer la limite d'une somme de deux suites, quand on connaît les limites des deux suites.

On ne démontrera pas les résultats obtenus.

1. On connaît maintenant les limites des suites de références (n), (n^2), (n^3), $(\sqrt{n})$, $\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, $\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

À partir de ces limites déterminer la limite de chacune des suites définies ci-dessous. On pourra vérifier à la calculatrice ou dans un tableur. On ne demande pas de justifier.

a) $u_n = 3 + \dfrac{1}{n^2}$ **b)** $u_n = -4 + n^3$ **c)** $u_n = 7 - n$ **d)** $u_n = n^2 + n^3$

e) $u_n = -n^2 - n$ **f)** $u_n = n^2 - n^3$ **g)** $u_n = n^2 - n$

2. À l'aide des résultats précédents, compléter sans justifier le tableau ci-dessous. Par exemple dans la deuxième colonne, la limite de la suite (u_n) est un nombre ℓ, et la limite de la suite (v_n) est un nombre ℓ', quelle est alors la limite de la somme $u_n + v_n$?

S'il y a un doute, écrire un point d'interrogation.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$						

Exercice 1.45

À partir du tableau précédent, déterminer la limite de chacune des suites ci-dessous. Indiquer FI si c'est une forme indéterminée.

1. $u_n = n^2 + n$ **2.** $u_n = 5 - \dfrac{1}{n^3}$ **3.** $u_n = n - n^3$ **4.** $u_n = n^3 + 6$ **5.** $u_n = -n - n^3$

6. $u_n = 8 - n^2$ **7.** $u_n = n^3 - n^2$

Exercice 1.46

À partir du tableau précédent, déterminer la limite de chacune des suites ci-dessous. Indiquer FI si c'est une forme indéterminée.

1. $u_n = n^2 + 1$ **2.** $u_n = -n^6 - n^3$ **3.** $u_n = 9 - n^4$ **4.** $u_n = n^5 - n^4$ **5.** $u_n = n^5 + n^2$
6. $u_n = -6 + \dfrac{1}{n}$ **7.** $u_n = -n + n^7$

Exercice 1.47

L'objectif de cet exercice est de déterminer la limite d'un produit de deux suites, quand on connaît les limites des deux suites.

On ne démontrera pas les résultats obtenus.

1. Chaque suite (p_n) définie ci-dessous est un produit $u_n \times v_n$. Compléter le tableau ci-dessous. On pourra vérifier à la calculatrice ou dans un tableur et on ne demande pas de justifier.

a) $p_n = \left(3 + \dfrac{1}{n^2}\right) \times \left(5 + \dfrac{1}{n}\right)$ **b)** $p_n = \left(4 + \dfrac{1}{n}\right) \times n^3$ **c)** $p_n = n^3 \times \sqrt{n}$
d) $p_n = \dfrac{1}{n} \times n^3$ **e)** $p_n = \dfrac{1}{n^2} \times n$ **f)** $p_n = \dfrac{1}{n} \times (n+2)$

	a)	**b)**	**c)**	**d)**	**e)**	**f)**
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$						
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$						
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n)$						

2. À l'aide des résultats précédents, compléter sans justifier le tableau ci-dessous. Par exemple dans la deuxième colonne, la limite de la suite (u_n) est un nombre ℓ, et la limite de la suite (v_n) est un nombre ℓ', quelle est alors la limite du produit $u_n \times v_n$?
Si on ne peut pas conclure, écrire FI (*forme indéterminée*).

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n)$				

Exercice 1.48

Déterminer la limite de chacune des suites ci-dessous. Indiquer FI si c'est une forme indéterminée.

On pourra utiliser les tableaux des propriétés 1.11 et 1.12. Pour le signe d'un produit on utilisera la règle des signes de la multiplication.

1. $u_n = -5n^2$ **2.** $u_n = 7 \times \left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ **3.** $u_n = \left(4 + \dfrac{1}{n}\right) \times \left(-2 + \dfrac{1}{n}\right)$ **4.** $u_n = n\sqrt{n}$
5. $u_n = n^3 + n\sqrt{n}$ **6.** $u_n = 3n^2 + 6n$ **7.** $u_n = 8n^3 + 7n - 9$ **8.** $u_n = 1 - 4\sqrt{n}$

Exercice 1.49

L'objectif de cet exercice est de donner une technique de calcul pour déterminer une limite lorsqu'on a une forme indéterminée. On appelle cela ***lever l'indétermination****.*

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - n$.

1. Peut-on déterminer la limite de la suite (u_n) à l'aide du tableau sur la limite d'une somme (propriété 1.11) ?

2. Pour pouvoir déterminer la limite de cette somme nous allons ***mettre en facteur le terme de plus haut degré***. Le terme n^2 est de degré 2 et le terme n est de degré 1, on met donc n^2 en facteur.

Justifier par un calcul que : $n^2 - n = n^2\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$

3. On sait maintenant que pour tout entier naturel non nul, $u_n = n^2\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.

Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 1.50

Utiliser la technique de calcul de l'exercice 1.49 pour déterminer la limite de chacune des suites définies ci-dessous.

1. $u_n = n^3 - n$ **2.** $u_n = n^2 - n^3$ **3.** $u_n = n^3 - 5n^2 + 2n$ **4.** $u_n = -3n^2 + 4n + 1$

Exercice 1.51

L'objectif de cet exercice est de déterminer la limite d'un quotient de deux suites, quand on connaît les limites des deux suites.

On ne démontrera pas les résultats obtenus.

1. Déterminer sans justifier la limite de chacune des suites définies ci-dessous.

a) $s_n = \dfrac{1}{n^2}$ **b)** $t_n = \dfrac{1}{n}$ **c)** $u_n = 2 + \dfrac{1}{n}$ **d)** $v_n = 4 + \dfrac{1}{n^2}$ **e)** $w_n = n^2$ **f)** $z_n = n^3$

2. Déterminer sans justifier la limite de chacun des quotients ci-dessous. On pourra vérifier à la calculatrice ou dans un tableur.

a) $\dfrac{u_n}{v_n}$ **b)** $\dfrac{u_n}{s_n}$ **c)** $\dfrac{u_n}{w_n}$ **d)** $\dfrac{s_n}{t_n}$ **e)** $\dfrac{t_n}{s_n}$ **f)** $\dfrac{w_n}{u_n}$ **g)** $\dfrac{z_n}{t_n}$ **h)** $\dfrac{w_n}{z_n}$ **i)** $\dfrac{z_n}{w_n}$

3. À l'aide des résultats précédents, compléter sans justifier le tableau ci-dessous. Par exemple dans la deuxième colonne, la limite de la suite (u_n) est un nombre ℓ, et la limite de la suite (v_n) est un nombre ℓ' non nul, quelle est alors la limite du quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$?

Si on ne peut pas conclure, écrire FI (*forme indéterminée*).

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	ℓ	0	∞	∞	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	0	∞	0	$\ell' \neq 0$	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$							

Exercice 1.52

À l'aide des tableaux des propriétés 1.11, 1.12, 1.13, déterminer la limite de chacune des suites ci-dessous. Indiquer FI si c'est une forme indéterminée.

On utilisera la règle des signes de la multiplication et de la division pour déterminer le signe du résultat.

1. $\dfrac{1 + \dfrac{1}{n}}{3 - \dfrac{1}{n^2}}$ **2.** $\dfrac{5}{n+2}$ **3.** $\dfrac{n^3}{-4 + \dfrac{1}{n}}$ **4.** $\dfrac{n^2 - 7}{n+2}$

Exercice 1.53

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{3n-1}{n+5}$.

1. Peut-on déterminer la limite de la suite (u_n) à l'aide du tableau sur la limite d'un quotient (propriété 1.13) ?
2. Pour pouvoir déterminer la limite de cette somme nous allons utiliser une méthode de calcul analogue à celle de l'exercice 1.49 : nous allons mettre en facteur le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur.

   Justifier par un calcul que : $u_n = \dfrac{3n\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)}{n\left(1+\dfrac{5}{n}\right)}$.
3. Simplifier la fraction précédente, puis déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 1.54

Déterminer la limite de chacune des suites définies ci-dessous. Si on a une forme indéterminée, effectuer les calculs nécessaires pour lever l'indétermination.

1. $u_n = \dfrac{n-4}{2n+1}$ **2.** $u_n = -\dfrac{8}{n+3}$ **3.** $u_n = \dfrac{n}{1+n^2}$ **4.** $u_n = \dfrac{n^3+6}{1+n}$

Exercice 1.55

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^3 + 4n^2$.

1. Justifier que la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ est $+\infty$.
2. On sait donc qu'il existe un entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10\,000$.

   Dans l'algorithme ci-contre, la variable k est un entier naturel, et la variable u est un réel.
   Compléter cet algorithme pour que la valeur finale de k soit le premier entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10\,000$.

```
k ← 0
Tant que ......................
    u ← k³ + 4k²
    k ← k + 1
Fin du Tant que
```

1.9 Limites de suites et comparaison

1.9.a Limite infinie

Exercice 1.56

La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n par $v_n = n^2 + (-1)^n$.

1. Peut on déterminer la limite de cette suite d'après les règles de calcul sur les limites ?
2. Déterminer une suite u_n telle $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = +\infty$
3. Quelle est la limite de la suite (v_n) ?

Exercice 1.57

$\boxed{\blacksquare}$ Deux suites (u_n) et (v_n) sont telles que pour tout entier naturel n $u_n \leqslant v_n$ et (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Comment la suite (v_n) se comporte-t-elle quand n tend vers $+\infty$? Démontrer sa réponse.

Indications

On veut démontrer que (v_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

On veut donc démontrer que tout intervalle de la forme $]A\ ;\ +\infty[$ contient tous les termes v_n à partir d'un certain rang.

On considère donc un nombre A quelconque et il faut démontrer qu'à partir d'un certain rang $v_n > A$.

Exercice 1.58

Déterminer en justifiant la limite de chacune des suites définies ci-dessous.

1. $u_n = \sqrt{n} + \sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$ (justifier d'abord que : $-1 + \sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant 1 + \sqrt{n}$)
2. $u_n = -n^3 + (-1)^n$ (justifier d'abord que : $-1 - n^3 \leqslant u_n \leqslant 1 - n^3$)

Exercice 1.59

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = n + 4 \times (-1)^n$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3.
2. La suite (u_n) est-elle croissante ?
3. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n - 4$.
4. En justifiant, en déduire la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.
5. Indiquer si l'affirmation ci-dessous est vraie ou fausse. Justifier.
   Si la limite d'une suite est $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, alors cette suite est croissante.

1.9.b Théorème des gendarmes

Exercice 1.60

Pour trois suites (u_n), (v_n), (w_n),

- si à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$;
- et si les suites (u_n) et (w_n) ont la même limite ℓ ;

Quel est alors le comportement de la suite (v_n) lorsque n tend vers $+\infty$? Ne pas justifier.

On appelle cette propriété *le théorème des gendarmes*.

Exercice 1.61

La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n non nul par $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n, $-\dfrac{1}{n^2} \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$
2. Déterminer la limite de la suite (v_n) en justifiant.

Exercice 1.62

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \dfrac{3n + (-1)^n}{n}$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n, $3 - \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 3 + \dfrac{1}{n}$
2. Déterminer la limite de la suite (u_n) en justifiant.

1.9.c Théorème de convergence

Exercice 1.63

1. Si une suite (u_n) est croissante et majorée, quel est le comportement de cette suite lorsque n tend vers $+\infty$?
   - Est-ce que cette suite tend vers $+\infty$?
   - Est-ce que cette suite converge (tend vers une limite ℓ) ?
   - Est-ce que cette suite n'a pas de limite ?
2. Même question pour une suite décroissante et minorée.

Exercice 1.64

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 0,5u_n + 2$.

On appelle f la fonction définie par $f(x) = 0,5x + 2$.

Partie A – Constructions et conjectures

1. La fonction f est représentée sur la figure 1.1, ainsi que la droite d'équation $y = x$.

   La construction géométrique du terme u_1 est déjà tracée. Construire les termes u_2, u_3, u_4.
2. Conjecturer par lecture graphique
   a) le sens de variation de la suite (u_n) ;
   b) le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

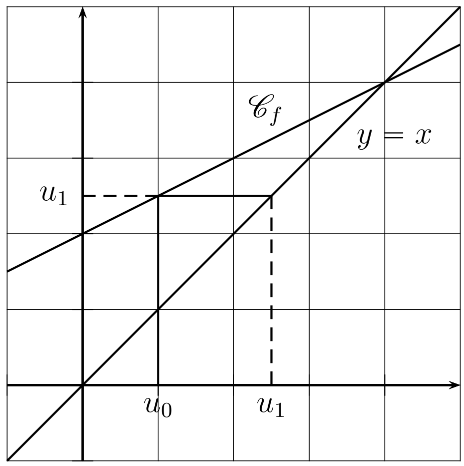


Fig. 1.1

Partie B – Démonstrations

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 5$.
4. Justifier que la suite (u_n) a une limite.
5. Justifier que la limite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
6. Déterminer la limite ℓ en justifiant.

Exercice 1.65

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 0,3\,u_n + 1$.

On appelle f la fonction définie par $f(x) = 0,3\,x + 1$.

Partie A – Constructions et conjectures

1. Sur la figure 1.2, tracer la représentation graphique de la fonction f et tracer la droite d'équation $y = x$.
2. Construire les termes u_1, u_2, u_3.
3. Conjecturer par lecture graphique
   a) le sens de variation de la suite (u_n) ;
   b) le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

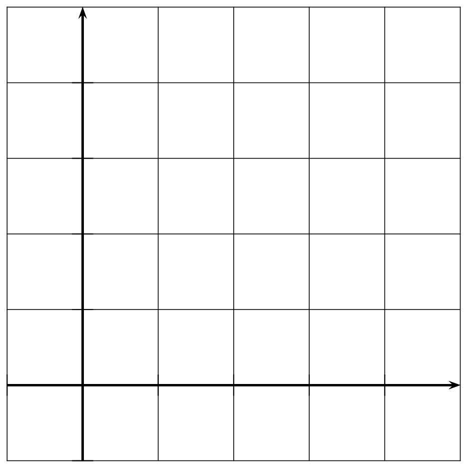


Fig. 1.2

Partie B – Démonstrations

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant u_{n+1}$.
2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$.
4. Justifier que la suite (u_n) a une limite.
5. Justifier que la limite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
6. Déterminer la limite ℓ en justifiant.

Exercice 1.66

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 6$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \sqrt{3,75 + u_n}$.
On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $[3,75\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{3,75 + x}$.

Partie A

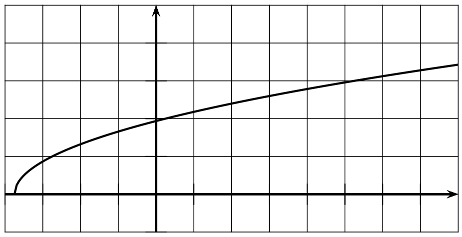


Fig. 1.3

1. La fonction f est représentée sur la figure 1.3.
   Tracer la droite d'équation $y = x$, placer sur la figure le terme u_0, puis construire les termes u_1, u_2.
2. Conjecturer par lecture graphique le sens de variation de la suite (u_n) et le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie B

1. Justifier que la fonction f est croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Démontrer par récurrence que :
   a) pour tout entier naturel n, $u_n > 2$;
   b) la suite (u_n) est décroissante, en démontrant que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
3. Justifier que la suite (u_n) a une limite.
4. Déterminer la limite ℓ en justifiant.

Exercice 1.67

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 2,5 - \dfrac{1}{u_n}$.

On appelle f la fonction définie par $f(x) = 2,5 - \dfrac{1}{x}$.

Partie A

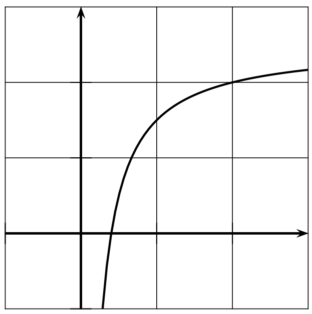


Fig. 1.4

1. La fonction f est représentée sur la figure 1.4.
   Tracer la droite d'équation $y = x$, placer sur la figure le terme u_0, puis construire les termes u_1, u_2, u_3.
2. Conjecturer par lecture graphique le sens de variation de la suite (u_n) et le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie B

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Démontrer par récurrence que :
   a) la suite (u_n) est croissante, en démontrant que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$;

b) pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 4$.

3. Justifier que la suite (u_n) a une limite finie.

4. Déterminer la limite ℓ en justifiant.

1.9.d Suite croissante non majorée

Exercice 1.68

Le théorème de convergence (cours 1.11.d) indique que si une suite est croissante et majorée, alors cette suite converge, mais si une suite est croissante et non majorée que se passe-t-il ?

L'objectif de cet exercice est de répondre à cette question et de le démontrer.

1. Quel est le comportement d'une suite (u_n) croissante non majorée lorsque n tend vers $+\infty$?
2. **Démonstration**
   (u_n) est une suite croissante non majorée. Soit un nombre A quelconque.
   Démontrer qu'il existe un rang N à partir duquel tous les termes u_n sont supérieurs à A.

1.10 Comportement à l'infini d'une suite géométrique

Exercice 1.69

Le but de cet exercice est d'étudier sans justifier le comportement de la suite (q^n) lorsque n tend vers $+\infty$, selon les valeurs de q, à partir de quelques exemples.

1. Conjecturer le comportement des suites définies ci-dessous lorsque n tend vers $+\infty$.
   a) $u_n = (-2)^n$ **b)** $u_n = (-1)^n$ **c)** $u_n = (-0,8)^n$ **d)** $u_n = 0^n$
   e) $u_n = 0,4^n$ **f)** $u_n = 1^n$ **g)** $u_n = 1,3^n$
2. Compléter ci-dessous en conjecturant d'après les résultats précédents. S'il y a un doute ne pas hésiter à essayer avec d'autres valeurs de q que celles du **1.**
   - Si $q \leqslant -1$, alors ....
   - Si $-1 < q < 1$, alors ....
   - Si $q = 1$, alors ....
   - Si $q > 1$, alors ....

Exercice 1.70

L'objectif de cet exercice est de démontrer le comportement de la suite (q^n) lorsque $q > 1$ quand n tend vers $+\infty$. Le programme précise qu'un élève de terminale S doit savoir démontrer cette propriété.

La démonstration va se faire en deux étapes.

1. Soit a un nombre réel strictement positif. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$.
2. En déduire, lorsque $q > 1$, la limite de la suite (q^n) + quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 1.71

Dans le cours, lire la propriété 1.20 page 37, puis déterminer le comportement de chacune des suites définies ci-dessous, lorsque n tend vers $+\infty$.

1. $u_n = (-0,85)^n$ **2.** $u_n = 1,04^n$ **3.** $u_n = (-1,2)^n$ **4.** $u_n = 0,92^n$
5. $u_n = 0,75 \times 1,3^n$ **6.** $u_n = 1,15^n + 6$ **7.** $u_n = -5 \times 0,7^n$ **8.** $u_n = 0,5^n - 9$
9. $u_n = 2 \times 0,88^n - 1,5$ **10.** $u_n = 0,7 \times 1,6^n + 3,25$

Exercice 1.72

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = 5 - 0,2^n$.

1. Quel est le sens de variation de cette suite ? Justifier.
2. Déterminer la limite de cette suite lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Indiquer si l'affirmation ci-dessous est vraie ou fausse. Justifier.
   Si une suite est croissante alors la limite de cette suite lorsque n tend vers $+\infty$, est $+\infty$.

Exercice 1.73

En 2010, une population d'oiseaux s'élève à 3 000 individus. Cette population diminue chaque année de 5 %, mais il y a 100 naissances chaque année.

On appelle p_n la population de l'année $2010 + n$, ainsi $p_0 = 3\,000$.

1. Avec la calculatrice ou un tableur, conjecturer l'évolution de cette population d'oiseaux à long terme.
   Le but des questions qui suivent est de démontrer ce résultat.
2. **a)** Calculer la population d'oiseaux en 2011, 2012, 2013, en détaillant les calculs.
   b) Justifier que pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,95p_n + 100$.
3. La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n, par $u_n = p_n - 2\,000$.
   a) Pour tout entier naturel n, calculer u_{n+1} en fonction de u_n.
   b) Justifier que (u_n) est une suite géométrique et donner son premier terme et sa raison.
   c) Écrire l'expression de u_n en fonction de n.
4. **a)** Écrire l'expression de p_n en fonction de n.
   b) Quelle sera l'évolution de cette population d'oiseaux à long terme ? Justifier.

Exercice 1.74

Un capital de 20 000 € est placé. On appelle C_n la valeur de ce capital après n années de placement, ainsi $C_0 = 20\,000$.
Dans l'algorithme ci-contre, C est un réel, i et n sont des entiers naturels non nuls, et la valeur finale de C est la valeur de C_n pour $n \geqslant 1$.

```
C ← 20 000
Pour i allant de 1 à n
    C ← 1,01C + 100
Fin du Pour
```

1. Calculer la valeur du capital après 3 ans. Détailler les calculs.
2. Démontrer par récurrence que : $20\,000 \times 1,01^n \leqslant C_n < C_{n+1}$.
3. Quel est le sens de variation de la suite (C_n) ? Justifier.
4. Quel est la limite de la suite (C_n) lorsque n tend vers $+\infty$? Justifier.
5. Compléter l'algorithme ci-dessous pour que la valeur finale de i indique la première année où le capital dépasse 24 000 €.

```
i ← 0
C ← 20 000
Tant que ............................
    C ← ...........................
    i ← ...........................
Fin du Tant que
```

1.11 Approximations de nombres réels

Exercice 1.75 (Méthode de Héron)

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$.

1. On admet que cette suite converge. Démontrer que sa limite est égale à $\sqrt{2}$.

2. La suite (u_n) permet donc d'obtenir des valeurs approchées fractionnaires ou décimale du nombre $\sqrt{2}$.
La calculatrice affiche $\sqrt{2}$ avec 9 décimales c'est à dire 9 chiffres après la virgule.
À partir de quel rang la suite (u_n) permet-elle d'obtenir

a) 4 décimales exactes ? **b)** 9 décimales exactes ?

On démontre que pour un nombre a positif, la suite définie par $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$, *converge vers* $\sqrt{a}$, *et permet donc de calculer des valeurs approchées de* $\sqrt{a}$.

Cette méthode s'appelle ***la méthode de Héron*** *parce qu'on a trouvé cette méthode dans les écrits du mathématicien grec Héron qui vécut à Alexandrie au premier siècle après J.C.*

Cette méthode était déjà connue auparavant des babyloniens et des égyptiens.

Exercice 1.76 (Approximation de π)

On considère une suite (P_n) de polygones réguliers inscrits dans un cercle de rayon 1.

P_2 est le carré de la figure 1.5.

P_3 est l'octogone régulier (8 côtés) de la figure 1.6.

P_4 est le polygone régulier à 16 côtés de la figure 1.7.

et ainsi de suite P_5 a 32 côtés, P_6 a 64 côtés, c'est à dire qu'on double le nombre de côtés à chaque étape.

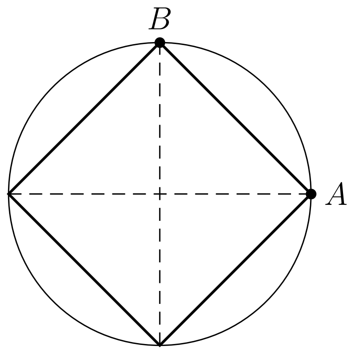


Fig. 1.5

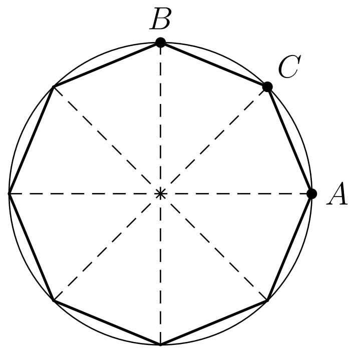


Fig. 1.6

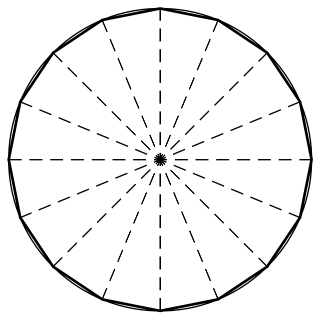


Fig. 1.7

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,
- on appelle p_n le périmètre du polygone P_n ;
- on appelle c_n la longueur d'un côté du polygone P_n.

1. Expliquer pourquoi la suite (p_n) des périmètres permet d'obtenir des approximations de π.

2. Calculer la valeur exacte de c_2, c'est à dire AB dans la figure 1.5.

3. Calculer la valeur exacte de c_3, c'est à dire AC ou BC dans la figure 1.6.

4. En utilisant la propriété de Pythagore on démontre que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $c_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - c_n^2}}$. On admettra cette égalité.

a) Vérifier qu'on retrouve bien la valeur de c_3 avec cette égalité.

b) Écrire l'expression de p_n en fonction de n et de c_n.

c) Créer un programme qui calcule $\dfrac{p_n}{2}$ quand on entre la valeur de n, qu'on pourra appeler `APPROXPI`.

d) La calculatrice affiche une valeur approchée du nombre π avec 9 décimales.
À partir de quel rang obtient-on 4 décimales exactes avec le programme précédent ?

Exercice 1.77 (Approximation de π (2))

La suite (S_n) est définie par $S_0 = \sqrt{12}$ et pour tout entier naturel n, $S_{n+1} = S_n + \sqrt{12}\,\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)3^{n+1}}$.

On admet que la suite (S_n) converge vers π.

Pour répondre aux deux questions ci-dessous, on pourra utiliser le module suite de la calculatrice ou un programme.

À partir de quel rang la suite (S_n) permet-elle d'obtenir

1. 4 décimales exactes ? **2.** 8 décimales exactes ?

Exercice 1.78 (Comparaison des vitesses de convergence)

Pour chacune des suites des exercices 1.75 à 1.77, indiquer à partir de quel rang on obtient 4 décimales exactes.

1.12 Exercices de bac

Exercice 1.79 (Bac S, Liban, mai 2013, ex 4)

On considère la suite numérique (v_n) définie par $v_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{9}{6 - v_n}$.

Partie A

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.
   Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme N° 1	Algorithme N° 2	Algorithme N° 3
Variables : v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ Fin pour Afficher v **Fin algorithme**	**Variables :** v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur 1 Afficher v v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ Fin pour **Fin algorithme**	**Variables :** v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire Afficher v v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ Fin pour Afficher v **Fin algorithme**

2. Pour $n = 10$ on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714

   Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970

   Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3. **a)** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.

   b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$.

   La suite (v_n) est-elle monotone ?

   c) Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

Partie B Recherche de la limite de la suite (v_n)

On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par $w_n = \dfrac{1}{v_n - 3}$.

1. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$
2. En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (v_n).

Exercice 1.80 (Bac S, Métropole-Réunion, juin 2013, ex 4)
Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbf{N}$ par :

$u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{3}n + 1$

1. **a)** Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.
   b) Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.
2. **a)** Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant n + 3$.
   b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{3}(n + 3 - u_n)$.
   c) En déduire une validation de la conjecture précédente.
3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbf{N}$ par $v_n = u_n - n$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.
   b) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + n$.
   c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :
   $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ et $T_n = \dfrac{S_n}{n^2}$.
   a) Exprimer S_n en fonction de n.
   b) Déterminer la limite de la suite (T_n).

1.13 Pour réviser

Chapitre du livre n° 3 – Raisonnement par récurrence et suite

Les exercices résolus

- ex 1 p 69 : démonstration par récurrence
- ex 9 p 71 : un peu difficile, on peut laisser
- ex 16 p 73 : suite définie par récurrence, sens de variation, majoration, convergence, calculer la limite
- ex 17 p 47 : $\boxed{\blacksquare}$ démonstration de cours, suite croisssante non majorée

Rubrique *Pour s'exercer*, corrigés pages 463 et 464

- ex 2 p 69 : Sens de variation et récurrence
- ex 10 p 71 : suite géométrique, écrire u_n en fonction de n, limite
- ex 18 p 73 : suite arithmético-géométrique, sens de variation, majoration, convergence, calcul de la limite
- ex 19 p 73 : suite arithmético-géométrique, sens de variation, signe, limite
- ex 21 et 26 p 49 : opérations sur les limites

Rubrique *Objectif bac*, corrigés page 471 et 472

- ex 68 p 79 (QCM) :
- ex 69 p 79 (Vrai/Faux) :
- ex 70 p 79 (Vrai/Faux) :
- ex 71 p 80 : étudier une suite définie par récurrence selon la valeur du premier terme
- ex 72 p 80 : suite définie par récurrence, algorithmique, somme,
- ex 73 p 80 : suite arithmético-géométrique

Autre exercice : ex 46 p 76, limite suite géométrique (correction du a) dans le cours sur fiche).

II Cours

1.1 (1[re] S) Définition et modes de génération d'une suite numérique.

1.1.a Définition et vocabulaire

Rappel : l'ensemble $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entiers positifs ou nul, on dit aussi « ensemble des nombres entiers naturels ».

Définition 1.1

Une suite numérique u est une fonction définie sur $\mathbb{N}$. L'image d'un entier naturel n par u est notée $u(n)$ ou u_n.

Vocabulaire

Un nombre n est appelé le *rang* et u_n est appelé *terme* de rang n.

1.1.b Modes de générations d'une suite

Il y deux façons de définir une suite :
- par une relation $u_n = f(n)$, ou relation explicite ;
- par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$, ou relation de récurrence.

Exemple 1 (relation $\boldsymbol{u_n = f(n)}$ ou relation explicite) : $u(n) = 50 + 1,5n$ ou $u_n = 50 + 1,5n$

$u_0 = 50 + 1,5 \times 0 = 50$ $\qquad$ $u_1 = 50 + 1,5 \times 1 = 51,5$ $\qquad$ $u_2 = 50 + 1,5 \times 2 = 53$

Exemple 2 (relation $\boldsymbol{u_{n+1} = f(u_n)}$ ou relation de récurrence) : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$

$u_0 = 1$ $\qquad$ $u_1 = 2 \times u_0 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$ $\qquad$ $u_2 = 2 \times u_1 + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7$

$u_3 = 2 \times u_2 + 1 = 2 \times 7 + 1 = 15$

Définition 1.2

- Une suite où, pour tout entier naturel n, chaque terme u_n est écrit **en fonction de $\boldsymbol{n}$**, c'est à dire $\boldsymbol{u_n = f(n)}$, est une suite définie par une **relation explicite**.
- Une suite où chaque terme est défini **en fonction du précédent**, c'est à dire $\boldsymbol{u_{n+1} = f(u_n)}$ est une suite définie **par une relation de récurrence**.

1.1.c Utilisation du tableur pour afficher les termes d'une suite

Relation explicite $u_n = f(n)$

Exemple 1 : $u_n = 50 + 1,5n$

	A	B
1	n	Un
2	0	50
3	1	51,5
4	2	53

Formule dans la cellule B2 : =50+1,5*A2

Relation par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

Exemple 2 : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$

	A	B
1	n	Un
2	0	1
3	1	3
4	2	7

Formule dans la cellule B3 : =2*B2+1

1.1.d Exemples d'algorithmes permettant de calculer un terme de rang donné.

Relation explicite $u_n = f(n)$

Exemple : $u_n = 50 + 1,5n$

Quand on connaît la valeur de n, pour calculer u_n, l'algorithme se réduit à : $\boxed{u \leftarrow 50 + 1,5n}$

et la variable u contient alors la valeur de u_n.

Relation par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

Exemple : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$

Quand on connaît la valeur de n, pour calculer u_n, l'algorithme doit calculer tous les termes successifs jusqu'à u_n, on utilise donc une boucle Pour.

Dans l'algorithme ci-contre, la valeur de u_n est la valeur finale de la variable u.

```
u ← 1
Pour k allant de 1 à n
    u ← 2u + 1
Fin du Pour
```

1.1.e Somme de termes successifs d'une suite $u_n = f(n)$ à la calculatrice

Exemple : pour la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$, calculons l'arrondi au millième de la somme $S = u_3 + u_4 + \cdots + u_9$.

TI 82 Advanced ou TI 83 Premium

1. Appuyer sur [2nde] [listes]
2. Aller sur `MATH`
3. Sélectionner `5:somme`
4. Appuyer à nouveau sur [2nde] [listes]
5. Aller sur `OPS`
6. Sélectionner `5:suite`
7. Compléter ainsi :
   ```
   Expr:1/(N+1)
   Variable:N
   start:3
   end:9
   step:1
   ```
8. Appuyer 2 fois sur [entrer]
9. On voit alors :
   `somme(suite(1/(N+1),N,3,9,1)`
10. Appuyer à nouveau sur [entrer]
11. On obtient $\boxed{S \approx 1,096}$.

Modèles plus anciens de TI 82

- Suivre les étapes **1.** à **6.**
- On voit alors : `somme(suite(`
- Compléter ainsi :
  `somme(suite(1/(N+1),N,3,9,1)`
- Appuyer sur [entrer]
- On obtient $\boxed{S \approx 1,096}$.

1.2 (1re S) Suites arithmétiques.

1.2.a Définition d'une suite arithmétique

Définition 1.3

Une suite telle que l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre r, s'appelle une **suite arithmétique de raison r** .

Relation de récurrence pour une suite arithmétique : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$

Relation explicite (u_n en fonction de n) pour une suite arithmétique

- Si u_0 est le premier terme de la suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = u_0 + nr}$;
- si u_p est le premier terme de la suite, pour tout $n \geqslant p$, $\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$.

Méthode 1.1 (Comment vérifier qu'une suite est arithmétique ou non ?)

Exemple 1 : $u_n = 3n - 4$

On reconnaît la formule $u_n = u_0 + nr$, avec $u_0 = -4$ et $r = 3$, donc la suite (u_n) est arithmétique.

Exemple 2 : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n - 5 = u_n + (-5)$

On reconnaît la formule de récurrence $u_{n+1} = u_n + r$, avec $r = -5$, donc la suite (u_n) est arithmétique.

Exemple 3 : $u_n = n^3$

On calcule les trois premiers termes : $u_0 = 0^3 = 0$ $u_1 = 1^3 = 1$ $u_2 = 2^3 = 8$

On calcule les différences entre termes successifs : $u_1 - u_0 = 1 - 0 = 1$ $u_2 - u_1 = 8 - 1 = 7$.

Ces différences ne sont pas égales, donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

1.2.b Somme de termes successifs d'une suite arithmétique

Propriété 1.1 (Somme des entiers de 1 à n)

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a l'égalité : $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Propriété 1.2

La somme S de termes successifs d'une suite arithmétique est donnée par l'égalité :

$$S = \frac{\text{Nombre de termes} \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

Exemple 1 : $1 + 2 + 3 + \cdots + 237 = \dfrac{237 \times (237+1)}{2} = \boxed{28\,203}$

Exemple 2 :

La suite (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 3$.

Calculons la somme : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{38}$.

Le 1er terme est : $u_0 = 5$. Calculons le dernier terme : $u_{38} = u_0 + n \times r = 5 + 38 \times 3 = 119$.

Nombre de termes : $1 + 38 = 39$ $S = \dfrac{39 \times (5 + 119)}{2} = \boxed{2\,418}$

1.3 (1^re S) Suites géométriques.

1.3.a Définition d'une suite géométrique

Définition 1.4

Une suite telle que l'on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre q, s'appelle une **suite géométrique de raison q** .

Relation de récurrence pour une suite géométrique : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{v_{n+1} = q \times v_n}$

Relation explicite (u_n en fonction de n) pour une suite géométrique

- si v_0 est le premier terme de la suite : $\boxed{v_n = v_0 \times q^n}$;
- si v_p est le premier terme de la suite : $\boxed{v_n = v_p \times q^{n-p}}$.

Méthode 1.2 (Comment vérifier qu'une suite est géométrique ou non ?)

Exemple 1 : $v_n = -7 \times 6^n$

On reconnaît la formule $v_n = v_0 \times q^n$, avec $v_0 = -7$ et $q = 6$, donc la suite (v_n) est géométrique.

Exemple 2 : $v_0 = 8$ et $v_{n+1} = 9\,v_n$

On reconnaît la formule de récurrence $v_{n+1} = q \times v_n$, avec $q = 9$, donc la suite (v_n) est géométrique.

Exemple 3 : $u_n = 2^n + 4$

On calcule les trois premiers termes : $v_0 = 2^0 + 4 = 5$ $v_1 = 2^1 + 4 = 6$ $v_2 = 2^2 + 4 = 8$

On calcule les quotients entre termes successifs : $\dfrac{v_1}{v_0} = \dfrac{6}{5} = \dfrac{18}{15} = 1,2$ $\dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3} = \dfrac{20}{15} \approx 1,3$

Ces quotients ne sont pas égaux, donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

1.3.b Somme de termes successifs d'une suite géométrique

Propriété 1.3

Pour tout nombre $q \neq 1$ et pour tout entier naturel n, $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Propriété 1.4

La somme S de termes successifs d'une suite géométrique est donnée par l'égalité :

$S = \text{premier terme} \times \dfrac{1 - q^{\text{Nombre de termes}}}{1 - q}$

Exemple 1 : $1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^{10} = \dfrac{1 - 5^{11}}{1 - 5} = \dfrac{-48\ 828\ 124}{-4} = \boxed{12\ 207\ 031}$

Exemple 2

La suite u est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1\,000$ et de raison $q = 1,06$.

Calculons la somme $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{59}$

Nombre de termes : $1 + 59 = 60$ 1er terme : $u_0 = 1\,000$ $S = 1\,000 \times \dfrac{1 - 1,06^{60}}{1 - 1,06} \approx \boxed{34\,029}$

1.3.c Taux d'évolution et suites géométriques

Définition 1.5 (Évolution et taux d'évolution)

Une **évolution** désigne une augmentation ou une diminution d'un taux t, nommé **taux d'évolution**.

Exemple : un prix de 346 € augmente de 8 %.

La valeur initiale est $V_I = 346$€. Le taux d'évolution est : $t = 8\ \% = \dfrac{8}{100} = 0{,}08$

Calcul de la valeur finale après l'augmentation :

$V_F = 346 + 346 \times 0{,}08 = 346 \times (1 + 0{,}08) = 346 \times 1{,}08 = 373{,}68$

Le calcul détaillé ci-dessus montre que pour calculer la valeur finale on multiplie la valeur initiale par 1,08 qui est le coefficient multiplicateur.

Propriété 1.5

Une valeur initiale V_I évolue d'un taux d'évolution t, et on nomme V_F la valeur finale.

Formule : $V_F = V_I \times (1+t)$ Schéma : $V_I \xrightarrow{\times(1+t)} V_F$

Définition 1.6 (Coefficient multiplicateur)

Pour un taux d'évolution t, on appelle **coefficient multiplicateur** le nombre $1+t$.

Exemples

- Une population de 15 700 habitants a augmenté de 13 %. $t = 0{,}13$
  Calcul de la population après augmentation : $15\,700 \times (1+0,13) = 15\,700 \times 1,13 = \boxed{17\,741}$.
- Une population de 9 300 habitants a baissé de 6 %. $t = -0{,}06$
  Calcul de la population après la baisse :
  $9\,300 \times (1+(-0,06)) = 9\,300 \times (1-0,06) = 9\,300 \times 0,94 = \boxed{8\,742}$.

Évolutions successives de même taux, suites géométriques

Exemple : une population de bactéries s'élève à 90 000 et diminue de 4 % par jour.

Posons $u_0 = 90\,000$ et appelons u_n la population du jour n.

Puisque la population de bactéries diminue de 4 % par jour, cette population est multipliée chaque jour par $1 - 0{,}04 = 0{,}96$.

Par conséquent la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,96.

Propriété 1.6 (Taux d'évolution et suite géométrique)

n est un entier positif. Une quantité subit des évolutions successives de même taux t.
On appelle u_0 la valeur de départ, et u_n la valeur après n évolutions successives.
Alors la suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $1+t$.

1.3.d Exemple de suite arithmético-géométrique

Une suite arithmético-géométrique est définie par récurrence sous la forme :
$u_{n+1} = au_n + b$, où a et b sont des nombres réels.

Un exemple est étudié ci-dessous.

Énoncé

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,9u_n + 2$.

1. Calculer les termes u_1 et u_2.
2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier.
3. La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 20$.
   a) Établir une relation entre v_n et v_{n+1}. En déduire que la suite (v_n) est géométrique et préciser ses caractéristiques
   b) Déterminer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.
4. Calculer u_{10}. Arrondir à 10^{-5} près.

Corrigé

1. Calculer les termes u_1 et u_2.
$u_1 = 0,9 \times 1 + 2 = \boxed{2,9}$ $\qquad u_2 = 0,9 \times 2,9 + 2 = \boxed{4,61}$.

2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier.
$u_1 - u_0 = 2,9 - 1 = 1,9 \qquad u_2 - u_1 = 4,61 - 2,9 = 1,71$
donc $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$, par conséquent $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ n'est pas arithmétique}}$.
$\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{2,9}{1} = 2,9 \qquad \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{4,61}{2,9} \approx 1,59$
donc $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$ par conséquent $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ n'est pas géométrique}}$.

Remarque
Si $u_{n+1} = au_n + b$, si $a \neq 0$ et si $b \neq 0$, malgré son nom, une suite arithmético-géométrique n'est ni arithmétique ni géométrique.

3. La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 20$.

a) Établir une relation entre v_n et v_{n+1}. En déduire que la suite (v_n) est géométrique et préciser ses caractéristiques.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 20 && \text{or } u_{n+1} = 0,9u_n + 2 \\ &= 0,9\,u_n + 2 - 20 \\ &= 0,9\,u_n - 18 && \text{or } \ v_n = u_n - 20 \ \text{ donc } \ u_n = v_n + 20 \\ &= 0,9\,(v_n + 20) - 18 \\ &= 0,9\,v_n + 18 - 18 \\ &= 0,9\,v_n + 18 - 18 \\ &= 0,9\,v_n \end{aligned}$$

On a donc, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0,9u_n$,
d'autre part, $v_0 = u_0 - 20 = 1 - 20 = -19$
par conséquent, $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est géométrique de raison 0,9 et de premier terme : } v_0 = -19}$.

b) Déterminer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

- v_n en fonction de n :
  puisque la suite (v_n) est géométrique, on sait que : $v_n = v_0 \times 0,9^n = \boxed{-19 \times 0,9^n}$.
- u_n en fonction de n : $u_n = v_n + 20 = \boxed{-19 \times 0,9^n + 20}$.

4. Calculer u_{10}. Arrondir à 10^{-5} près.
$u_{10} = -19 \times 0,9^{10} + 20 \approx \boxed{13{,}375\,11}$

1.4 Raisonnement par récurrence

Le programme précise qu'un élève de terminale S doit ***savoir mener un raisonnement par récurrence*** *et que ce type de raisonnement intervient tout au long de l'année et pas seulement dans le cadre de l'étude des suites.*

Propriété 1.7 (Axiome de récurrence)

Pour une propriété (P_n),
Si
- **initialisation :** la propriété (P_0) est vraie ;
- **hérédité :** pour tout entier naturel k, la propriété (P_k) est héréditaire,
  c'est à dire que si (P_k) est vraie, alors (P_{k+1}) est vraie ;

alors pour tout entier naturel n, la propriété (P_n) est vraie.

Exemple

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$.

Calculs des premiers termes et conjecture de la formule.

Calculs de u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.

$n = 0$, $u_{0+1} = u_0 + 2 \times 0 + 1$, $u_1 = 1$

$n = 1$, $u_{1+1} = u_1 + 2 \times 1 + 1$, $u_2 = 4$

$n = 2$, $u_{2+1} = u_2 + 2 \times 2 + 1$, $u_3 = 9$

$n = 3$, $u_{3+1} = u_3 + 2 \times 3 + 1$, $u_4 = 16$

$n = 4$, $u_{4+1} = u_4 + 2 \times 4 + 1$, $u_5 = 25$

D'après ces valeurs de u_n, il semble que la formule qui donne u_n en fonction de n soit $u_n = n^2$.

On conjecture, c'est à dire on suppose que la formule est $u_n = n^2$.

Démonstration par récurrence

Appelons (P_n) la propriété : $u_n = n^2$, et démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, la propriété (P_n) est vraie.

Initialisation : vérifions que la propriété est vraie pour $n = 0$

On a : $u_0 = 0$ d'après l'énoncé, donc on a bien $u_0 = 0^2$, par conséquent la propriété (P_0) est vraie.

Hérédité :

supposons que pour un entier naturel on ait $u_k = k^2$ et démontrons qu'alors $u_{k+1} = (k + 1)^2$

$u_{k+1} = u_k + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$

Nous avons prouvé que si $u_k = k^2$ alors $u_{k+1} = (k+1)^2$, autrement dit la propriété (P_k) est héréditaire.

Conclusion :

Nous avons prouvé que
- la propriété (P_0) est vraie ;
- pour tout entier naturel k, la propriété (P_k) est héréditaire.

Donc, d'après l'axiome de récurrence, la propriété (P_n) est vraie pour tout entier naturel n.

1.5 (1re S) Sens de variation d'une suite numérique.

1.5.a Définition

Définition 1.7

- Dire qu'une suite u est **croissante** signifie que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$;
- Dire qu'une suite u est **décroissante** signifie que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$;
- Dire qu'une suite u est **constante** signifie que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n$.

1.5.b Méthodes pour déterminer le sens de variation d'une suite

Les deux premières méthodes peuvent s'appliquer à tous les types de suites.

Utiliser la définition

On cherche à démontrer selon le cas que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$ ou $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

- Si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, alors la suite u est **croissante**.
- Si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, alors la suite u est **décroissante**.

Étudier le sens de variation d'une fonction

Cette méthode n'est valable que pour les suites où u_n est défini en fonction de n $(u_n = f(n))$.

> Une fonction f est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ et pour pour tout entier naturel $u_n = f(n)$.
> - Si la fonction f est **croissante** sur $[0\ ;\ +\infty[$, alors la suite u est **croissante**.
> - Si la fonction f est **décroissante** sur $[0\ ;\ +\infty[$, alors la suite u est **décroissante**.

1.5.c Exemple

Sens de variation de la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 + n$

Première méthode : signe de $u_{n+1} - u_n$

$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + (n+1) - (n^2 + n) = n^2 + 2n + 1 + n + 1 - n^2 - n = 2n + 2$

$2n + 2 \geqslant 0 \iff 2n \geqslant -2 \iff n \geqslant -1$

Or n est entier naturel donc $n \geqslant 0$, donc $n \geqslant -1$ donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$,

donc la $\boxed{\text{suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$

Deuxième méthode : sens de variation de f telle $u_n = f(n)$

$u_n = n^2 + n$ donc $f(x) = x^2 + x$

$f'(x) = 2x + 1$

$2x + 1 \geqslant 0 \iff x \geqslant -\dfrac{1}{2}$

donc la fonction f est croissante sur $\left[-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$, donc la fonction f est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$,

donc la $\boxed{\text{suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$

1.5.d Sens de variation des suites arithmétiques et géométriques

Propriété 1.8

> - Une suite arithmétique de raison positive est croissante.
> - Une suite arithmétique de raison négative est décroissante.

Propriété 1.9

> - Si $q < 0$ la suite (q^n) n'est ni croissante, ni décroissante.
> - Si $q = 0$ la suite (q^n) est constante.
> - Si $0 < q < 1$ la suite (q^n) est décroissante.
> - Si $q = 1$ la suite (q^n) est constante.
> - Si $q > 1$ la suite (q^n) est croissante.

Exemples

$u_n = 1,3^n$ $\quad$ $1,3 > 1$, donc la suite $(1,3^n)$ est croissante.

$u_n = 0,75^n$ $\quad$ $0 < 0,75 < 1$, donc la suite $(0,75^n)$ est décroissante.

$u_n = -3 \times 0,5^n$ $\quad$ $0 < 0,5 < 1$, donc la suite $(0,5^n)$ est décroissante,
et comme -3 est négatif, la suite $(-3 \times 0,5^n)$ est croissante.

$u_n = (-6)^n$ $\quad$ $-6 < 0$, donc la suite $((-6)^n)$ n'est ni croissante, ni décroissante.

1.6 Suite majorée, minorée, bornée

Définition 1.8

Dire qu'une suite est majorée signifie qu'il existe un nombre réel M tel que tous les termes de cette suite sont inférieurs ou égaux à M.

Définition 1.9

Dire qu'une suite est minorée signifie qu'il existe un nombre réel m tel que tous les termes de cette suite sont supérieurs ou égaux à m.

Définition 1.10

Dire qu'une suite est bornée signifie que cette suite est majorée et minorée.

1.7 Limite finie ou infinie d'une suite

1.7.a Définitions et exemples

Définition 1.11 (Limite finie)

Dire qu'une suite (u_n) tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$,
signifie que
tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Définition 1.12 (Limite $+\infty$)

Dire qu'une suite (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$
signifie que : tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.

Vocabulaire : convergente, divergente

Une suite **convergente** est une suite qui a une limite finie ℓ (voir définition plus haut).

Une suite **divergente** est une suite qui n'est pas convergente, c'est à dire une suite qui tend vers l'infini ou une suite qui n'a pas de limite.

Exemple

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = 5 + \dfrac{1}{n}$.

À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, on obtient les valeurs suivantes :

$u_1 = 6 \quad u_2 = 5,5 \quad u_3 \approx 5,33 \quad u_5 = 5,2 \quad u_{10} = 5,1 \quad u_{50} = 5,02 \quad u_{200} \approx 5,005 \quad u_{500} \approx 5,002$

Il semble bien que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = 5$.

Dire que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = 5$ signifie que si je prends r un nombre positif quelconque, on peut toujours déterminer un rang N à partir duquel toutes les valeurs u_n sont dans l'intervalle $]5 - r\ ;\ 5 + r[$.

Prenons d'abord comme exemple $r = 0,001$.

L'intervalle $]5 - 0,001\ ;\ 5 + 0,001[$ est l'intervalle $]4,999\ ;\ 5,001[$.

À partir de quel rang N toutes les valeurs $5 + \dfrac{1}{n}$ sont-elles dans l'intervalle $]4,999\ ;\ 5,001[$?

À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, on constate que ce rang est $N = 1\,000$.

Démontrons le.

Si $n > 1\,000$, alors $0 < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{1\,000}$ donc $0 < 5 + \dfrac{1}{n} < 5 + \dfrac{1}{1\,000}$ c'est à dire $5 < u_n < 5,001$.

Autrement dit nous avons prouvé qu'à partir du rang $1\,001$ toutes les valeurs u_n sont dans l'intervalle $]5 - 0,001\ ;\ 5 + 0,001[$.

Considérons maintenant r un nombre strictement positif.

À partir de quel rang N toutes les valeurs $5 + \dfrac{1}{n}$ sont-elles dans l'intervalle $]5 - r\ ;\ 5 + r[$. ?

On sait que $5 + \dfrac{1}{n} > 5$, donc il suffit que $\dfrac{1}{n} < r$ ce qui équivaut à $n > \dfrac{1}{r}$.

Si $n > \dfrac{1}{r}$, alors $0 < \dfrac{1}{n} < r$ donc $0 < 5 + \dfrac{1}{n} < 5 + r$ c'est à dire $5 < u_n < 5 + r$.

Le nombre $\dfrac{1}{r}$ n'est pas forcément entier, donc j'appelle N le premier entier supérieur ou égal à $\dfrac{1}{r}$.

Autrement dit nous avons prouvé qu'à partir du rang N toutes les valeurs u_n sont dans l'intervalle $]5 - r\ ;\ 5 + r[$.

1.8 Limite d'une suite et algorithmique – Seuil

Le programme indique que, dans le cas d'une limite infinie, étant donnés une suite croissante u_n et un nombre réel A, un élève de terminale S doit savoir déterminer à l'aide d'un algorithme un rang à partir duquel u_n est supérieur à A.

Vocabulaire : le nombre A est ainsi un ***seuil*** à franchir.

Énoncé

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = 7n^3 + 6n + 8$.

1. Justifier que la suite (u_n) est croissante.

2. À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, quelle semble être la limite de cette suite ?

3. Écrire un algorithme qui permet à partir d'un nombre A de déterminer le rang n à partir duquel toutes les valeurs u_n sont dans l'intervalle $]A\ ;\ +\infty[$, puis programmer cet algorithme, et le tester.

Corrigé

1. Justifier que la suite (u_n) est croissante.
- Justifions d'abord que la fonction f définie par $f(x) = 7x^3 + 6x + 8$ est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
  $f'(x) = 7 \times 3x^2 + 6 \times 1 + 0 = 21x^2 + 6$, or, pour tout réel x, x^2 est positif,
  donc $21x^2$ est positif, donc $21x^2 + 6$ est positif.
  Comme sa dérivée f' est positive sur $\mathbb{R}$, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$, et donc aussi sur $[0\ ;\ +\infty[$.
- Puisque $u_n = f(n)$ et puisque la fonction f est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$,
  $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante}}$.

2. À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, quelle semble être la limite de cette suite ?
On calcule par exemple : $u_{10} = 7\,068$ $\quad u_{50} = 875\,308$ $\quad u_{100} = 7\,000\,608$.
Il semble que la limite de (u_n) soit $\boxed{+\infty}$.

3. Écrire un algorithme qui permet à partir d'un nombre A de déterminer le rang n à partir duquel toutes les valeurs u_n sont dans l'intervalle $]A\ ;\ +\infty[$, puis programmer cet algorithme, et le tester.

Algorithme et programme en Python 3.
D'après la définition 1.12, dire qu'une suite (u_n) tend vers $+\infty$ signifie que pour un nombre réel A, à partir d'un certain rang n on a : $u_n \in]A\ ;\ +\infty[$, autrement dit $u_n > A$.
Si de plus la suite (u_n) est croissante, dès qu'on a trouvé une valeur de n telle que $u_n > A$, on sait que tous les termes suivants seront eux aussi supérieurs à A.
On cherche le plus petit entier naturel n tel que $u_n > A$, pour cela on compare u_0 et A, puis u_1 et A, puis u_2 et A, et on continue tant que $u_k \leqslant A$.
Étant donné cette suite croissante (u_n) et un nombre réel A,
on détermine le rang à partir duquel u_n est supérieur à A à l'aide de l'algorithme ci-dessous où : **la valeur finale de n est le rang n à partir duquel $u_n > A$.**

Algorithme	`Programme en python3`
	`def seuil(A):`
$n \leftarrow 0$	`    n=0`
$u \leftarrow 8$	`    u=8`
Tant que $u \leqslant A$	`    while(u<=A):`
$\quad n \leftarrow n+1$	`        n=n+1`
$\quad u \leftarrow 7n^3+6n+8$	`        u=7*n**3+6*n+8`
Fin du Tant que	
	`    return n`

Test du programme.
J'ai calculé précédemment que : $u_{10} = 7\,068$. On peut calculer aussi : $u_{11} = 9\,391$.
Puisque la suite (u_n) est croissante, je constate donc que le rang n à partir duquel u_n est supérieur à $9\,000$ est 11.
Dans la console Python, je saisis `seuil(9000)`, je valide et on voit :

```
In[1]: seuil(9000)
Out[1]: 11
```

Ce programme semble donc s'exécuter correctement.

1.9 Suites de référence

Propriété 1.10 (admise)

- Les suites (n), (n^2), (n^3), $(\sqrt{n})$, ont pour limite $+\infty$.
- Les suites $\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, $\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, ont pour limite 0.

1.10 Opérations sur les limites

Le programme précise qu'un élève de terminale S doit savoir étudier la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de deux suites.

Les propriétés à connaître sont résumées par les 3 tableaux ci-dessous.

Précisions concernant ces tableaux

- ℓ et ℓ' sont deux nombres réels.

- Pour obtenir le signe concernant le produit ou le quotient, il faut appliquer la règle des signes.
- FI signifie *forme indéterminée*, c'est à dire qu'on ne peut pas conclure.

Propriété 1.11 (Limite d'une somme)

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Propriété 1.12 (Limite d'un produit)

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell\neq 0$	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n\times v_n)$	$\ell\times\ell'$	∞	∞	FI

Propriété 1.13 (Limite d'un quotient)

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell\neq 0$	ℓ	0	∞	∞	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell'\neq 0$	0	∞	0	$\ell'\neq 0$	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	∞	0	FI	∞	∞	FI

1.11 Limites de suites et comparaison

1.11.a Limite infinie et comparaison

Le programme précise qu'un élève de terminale S doit savoir démontrer la propriété ci-dessous.

Propriété 1.14

Pour deux suites (u_n) et (v_n),
- Si à partir d'un certain rang $(u_n)\leqslant(v_n)$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)=+\infty$.
- Si à partir d'un certain rang $(u_n)\geqslant(v_n)$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=-\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)=-\infty$.

Démonstration du premier point (à connaître)

Sachant que $u_n\leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et que (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, nous voulons démontrer que (v_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Nous voulons donc démontrer que tout intervalle de la forme $]A\ ;\ +\infty[$ contient tous les termes v_n à partir d'un certain rang.

On considère donc un nombre A quelconque et nous allons prouver qu'à partir d'un certain rang $v_n>A$.

On sait qu'à partir d'un certain rang N_1, on a $u_n\leqslant v_n$ c'est à dire $v_n\geqslant u_n$.

D'autre part, comme (u_n) tend vers $+\infty$, on sait aussi qu'à partir d'un certain rang N_2, on a $u_n>A$.

Appelons alors N le plus grand des deux rangs N_1 et N_2.

On peut alors dire qu'à partir de ce rang N on a : $v_n\geqslant u_n$ et $u_n>A$.

Par conséquent, à partir de ce rang N on a : $v_n>A$.

1.11.b Théorème des gendarmes

Propriété 1.15 (admis)

Pour trois suites (u_n), (v_n), (w_n),
si
- à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$;
- les suites (u_n) et (w_n) ont la même limite ℓ ;

alors la suite (v_n) tend vers ℓ.

1.11.c Suite croissante convergente

Propriété 1.16

Si une suite est croissante et admet pour limite ℓ ,
alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à ℓ .

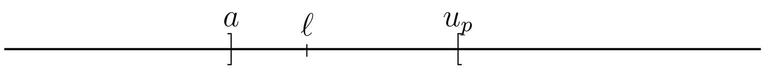
Démonstration

Soit une suite (u_n) croissante et qui tend vers une limite ℓ.

Nous voulons démontrer qu'alors tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs ou égaux à ℓ.

Supposons le contraire, c'est à dire qu'il existe un rang p tel que $u_p > \ell$ et démontrons que c'est impossible.

Considérons alors un nombre a tel que $a < \ell$, ainsi l'intervalle $]a\ ;\ u_p[$ est un intervalle ouvert qui contient ℓ.



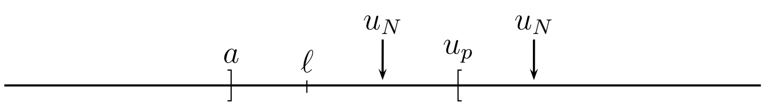
Puisque la suite (u_n) tend vers ℓ, on sait donc qu'à partir d'un certain rang r tous les termes (u_n) sont dans l'intervalle $]a\ ;\ u_p[$.

Appelons alors N le plus grand des deux rangs p et r.

On a donc $N \geqslant r$ donc $u_N \in]a\ ;\ u_p[$, c'est à dire $a < u_N < u_p$.

D'autre part, $N \geqslant p$, c'est à dire $p \leqslant N$ et comme la suite (u_n) est croissante on a : $u_p \leqslant u_N$.

On obtient donc : $a < u_N < u_p \leqslant u_N$ ce qui est impossible.



Donc il n'existe pas de rang p tel que $u_p > \ell$ autrement dit pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \ell$

Remarque – Démonstration par l'absurde

La démonstration précédente utilise le principe ci-dessous.

On veut démontrer une propriété qui dit que si une affirmation A est vraie alors l'affirmation B est vraie.

On suppose que l'affirmation A est vraie et que l'affirmation B est fausse, et on démontre que c'est impossible.

Cela démontre que la propriété (si A alors B) est vraie.

On appelle cela une *démonstration par l'absurde*.

1.11.d Théorème de convergence

Le programme précise qu'un élève de terminale S doit savoir utiliser la propriété ci-dessous.

Propriété 1.17 (admise)

- Si une suite est croissante et majorée, alors cette suite converge.
- Si une suite est décroissante et minorée, alors cette suite converge.

Remarques

- Ce théorème est admis parce que sa démonstration n'est pas du tout de niveau de terminale S.
- Il faut bien comprendre que si une suite est croissante et majorée, ce théorème permet d'affirmer que cette suite a une limite, mais **ne donne pas la valeur de sa limite.**
- Ce théorème est très important et très utile, notamment pour justifier que certaines suites définies par récurrence sont convergentes.

1.11.e Suite croissante non majorée

La propriété ci-dessus indique que si une suite est croissante et majorée, alors cette suite converge, mais si une suite est croissante et non majorée que se passe-t-il ?

La propriété ci-dessous est la réponse à cette question.

Propriété 1.18

- Si une suite est croissante et non majorée, alors cette suite a pour limite $+\infty$.
- Si une suite est décroissante et non minorée, alors cette suite a pour limite $-\infty$.

Démonstration du premiers cas

Soit (u_n) une suite croissante non majorée.

Dire que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ signifie que pour tout réel A, il existe un rang N à partir duquel tous les termes u_n sont supérieurs à A.

Considérons donc un nombre A quelconque.

Puisque la suite (u_n) est non majorée, cela implique que A ne peut pas être un majorant de cette suite, par conséquent, il existe un rang N tel que $u_N \geqslant A$.

Comme la suite (u_n) est croissante, tous les termes u_n à partir du rang N sont supérieurs ou égaux à u_N, donc supérieurs ou égaux à A.

Donc la suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

1.12 Comportement à l'infini d'une suite géométrique

Le programme précise qu'un élève de terminale S doit savoir démontrer la propriété ci-dessous.

Propriété 1.19

Soit a un nombre réel strictement positif. Pour tout entier naturel n : $(1+a)^n \geqslant 1+na$.

▣ Démonstration (à connaître)

Démontrons cette propriété par récurrence.

Pour tout entier naturel n, on appelle $P(n)$ la propriété $(1+a)^n \geqslant 1+na$.

Intialisation.

On a : $(1+a)^0 = 1$ et $1+0\times a = 1$ par conséquent on a bien $(1+a)^0 \geqslant 1+0\times a$.

Autrement dit $P(0)$ est vraie.

Hérédité.

Pour un entier naturel k, supposons que $P(k)$ soit vraie, c'est à dire $(1+a)^k \geqslant 1+ka$.

Est-ce que $P(k+1)$ est vraie, c'est à dire est-ce que l'inégalité $(1+a)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)a$ est vraie ?

Si : $(1+a)^k \geqslant 1+ka$, on peut multiplier les deux membres de cette inégalité par $1+a$ qui est positif

Donc : $(1+a)^k \times (1+a) \geqslant (1+ka)\times(1+a)$

Donc : $(1+a)^{k+1} \geqslant 1+a+ka+ka^2$

Donc : $(1+a)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)a+ka^2$,

or ka^2 est positif donc $1+(k+1)a+ka^2 \geqslant 1+(k+1)a$

Donc : $(1+a)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)a$

Conclusion.

Nous avons prouvé que $P(0)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie alors $P(k+1)$ est vraie.

Par conséquent pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie.

Propriété 1.20 (Comportement à l'infini de la suite (q^n))

Soit q un nombre réel.
- Si $q \leqslant -1$, alors la suite (q^n) n'a pas de limite.
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(q^n) = 0$.
- Si $q = 1$, alors pour tout entier naturel n, $q^n = 1$.
- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(q^n) = +\infty$.

Le programme précise qu'un élève de terminale S doit savoir démontrer la propriété ci-dessus lorsque $q > 1$.

▣ Démonstration dans le cas où $q > 1$ (à connaître)

Démontrons que si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(q^n) = +\infty$.

Si $q > 1$, nous pouvons écrire $q = 1+a$ avec $a > 0$.

Ainsi : $q^n = (1+a)^n$ et nous savons, par la propriété précédente que $(1+a)^n \geqslant 1+na$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}(n) = +\infty$, donc, puisque a est positif $\lim\limits_{n\to+\infty}(an) = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+na) = +\infty$.

Nous savons maintenant que $(1+a)^n \geqslant 1+na$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+na) = +\infty$,

donc, d'après le théorème de comparaison des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty}((1+a)^n) = +\infty$,

c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty}(q^n) = +\infty$.

Chapitre 2

Probabilités conditionnelles

I Exercices

2.1 Probabilité, intersection, réunion, arbre

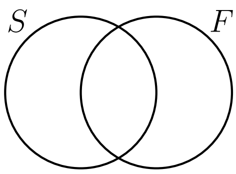
Exercice 2.1

Dans un lycée on donne les effectifs suivants : 1000 élèves en tout, 400 élèves en seconde, 250 élèves en première. Parmi les élèves de seconde, 220 élèves sont des filles, parmi les élèves de première, 120 élèves sont des filles, parmi les élèves de terminale, 160 élèves sont des garçons.

1. Compléter le tableau d'effectifs ci-dessous.

	Secondes	Premières	Terminales	Total
Filles				
Garçons				
Total				

2. Compléter le schéma ci-dessous avec des effectifs. Le disque de gauche représente l'ensemble des élèves de seconde, et le disque de droite représente l'ensemble des filles.



3. On interroge un élève au hasard. On définit les événements suivants :

- S « l'élève interrogé est en seconde » ;
- F « l'élève interrogé est une fille » ;
- P « l'élève interrogé est en première ».

a) Quel est l'événement $\overline{F}$, c'est à dire l'événement contraire de F ?

b) Calculer les probabilités suivantes : $p(F)$, $p(\overline{F})$, $p(F) + p(\overline{F})$

c) Décrire par une phrase l'événement $S \cap F$, c'est à dire l'événement S et F.

d) Calculer la probabilité $p(S \cap F)$

e) Décrire par une phrase l'événement $S \cup F$, c'est à dire l'événement S ou F (« ou » veut dire l'un ou l'autre ou les deux).

f) Calculer la probabilité $p(S \cup F)$

g) Est ce que l'égalité $p(S \cup F) = p(S) + p(F)$ est vraie ? Vérifier par des calculs. Si la réponse est non, corriger la formule.

h) Calculer les probabilités $p(P)$, $p(S \cap P)$, $p(S \cup P)$.

4. Compléter le tableau de probabilités ci-dessous.

	S	P	T	Total
F				
G				
Total				

5. Représenter la situation de l'exercice par un arbre.

Exercice 2.2

Un bureau de poste possède deux guichets A et B dont l'un des deux au moins est ouvert.

On note :

- C l'événement « le guichet A est ouvert »
- D l'événement « le guichet B est ouvert »

Une étude statistique a montré que $p(\text{C}) = 0,8$, $p(\text{D}) = 0,5$.

Calculer la probabilité que les deux guichets soient ouverts à la fois.

2.2 Expériences identiques et indépendantes, espérance, loi binomiale.

Exercice 2.3

On a effectué une enquête sur les destinations de vacances. Quelle que soit la personne interrogée, la probabilité

- qu'elle choisisse des vacances en bord de mer (M) est égale à 0,6 ;
- qu'elle choisisse une randonnée en montagne (R) est égale à 0,3 ;
- sinon elle reste à son domicile (D).

On rencontre successivement deux personnes interrogées durant cette enquête.

1. Construire l'arbre pondéré correspondant à cette expérience aléatoire.

2. Calculer la probabilité qu'une personne interrogée sur les deux choisisse des vacances en bord de mer.

Exercice 2.4

On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de personnes ayant choisi le bord de mer comme destination dans l'exercice 2.3

1. Déterminer la loi de probabilité de X (c'est à dire dresser un tableau comportant les différentes valeurs possibles de X et les probabilités correspondantes).

2. Calculer l'espérance de X.

3. Que signifie le résultat précédent si on renouvelle cette expérience aléatoire un grand nombre de fois (interroger 1000 fois 2 personnes par exemple) ?

Exercice 2.5

Dans une usine, l'énergie électrique est fournie par deux générateurs. On suppose que chacun des générateurs tombe en panne avec une probabilité de 0,005 et ceci d'une façon indépendante de l'autre générateur.

Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins un générateur qui fonctionne ?

Exercice 2.6

Un téléopérateur téléphone successivement à trois personnes susceptibles d'être intéressées par sa proposition. Quelle que soit la personne appelée, la probabilité qu'elle soit intéressée est 0,6.

On note A l'événement « la personne appelée est intéressée » et $\overline{A}$ l'événement contraire.

1. Construire l'arbre pondéré correspondant à cette expérience aléatoire.

2. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de personnes intéressées.

  a) Déterminer la loi de probabilité de X.

  b) Calculer l'espérance de X.

Exercice 2.7

Une entreprise reçoit des boîtes de guirlandes électriques dont trois sur dix sont des guirlandes pour l'extérieur. Ces boîtes sont très nombreuses et mélangées. Un employé vérifie au hasard 4 boîtes. On assimile ce choix à quatre tirages identiques et indépendants.

On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de boîtes contenant des guirlandes pour extérieur.

1. Quelle la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.

2. Effectuer les calculs suivants en utilisant la formule du cours. On arrondira les résultats à 10^{-4} près.

  a) Calculer la probabilité que les quatre boîtes vérifiées contiennent des guirlandes pour extérieur.

  b) Calculer la probabilité que deux boîtes sur les quatre contiennent des guirlandes pour extérieur.

  c) Calculer la probabilité que au moins une boîte sur les quatre contiennent des guirlandes pour extérieur.

  d) Calculer la probabilité que au plus deux boîtes sur les quatre contiennent des guirlandes pour extérieur.

3. Vérifier les résultats du 1. à la calculatrice en utilisant la commande `binomFdp` ou `binomFRép` (voir le paragraphe 2.4.d du cours).

Exercice 2.8

Un tireur a une probabilité d'atteindre sa cible égale à 0,7. Il tire dix fois de suite. On considère ces tirs comme des épreuves identiques et indépendantes. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de tirs qui atteignent la cible.

1. Calculer la probabilité qu'il atteigne la cible exactement 6 fois.

2. Calculer la probabilité qu'il atteigne la cible au plus 3 fois.

3. Calculer la probabilité qu'il atteigne la cible plus de 5 fois.

2.3 Probabilité conditionnelle

Exercice 2.9

Une entreprise fait fabriquer 1000 pièces industrielles par deux usines A et B. L'usine A a produit 400 pièces dont 50 ont un défaut, et l'usine B a produit 600 pièces dont 60 ont un défaut.

1. Compléter le tableau d'effectifs suivant.

	Avec défaut	Sans défaut	Total
Usine A			
Usine B			
Total			

2. On choisit une pièce au hasard parmi les 1000 pièces produites. On définit les événements suivants :

- A « la pièce choisie sort de l'usine A » ;
- B « la pièce choisie sort de l'usine B » ;
- D « la pièce choisie a un défaut ».

Pour les questions (a) à (f), les probabilités seront données sous forme décimale, sans arrondir.

a) On veut comparer les performances des deux usines. Quelle usine a la moins bonne probabilité de défaut ? Justifier en détaillant les calculs.

b) Calculer $p(A)$, $p(B)$, $p(D)$.

c) Décrire par une phrase les événements $A \cap D$ et $B \cap D$.

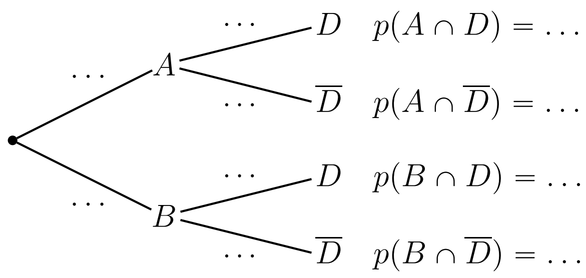
d) Calculer $p(A \cap D)$, $p(B \cap D)$, $\dfrac{p(A \cap D)}{p(A)}$, $\dfrac{p(B \cap D)}{p(B)}$.

e) Une pièce est choisie parmi les pièces de l'usine A. Calculer la probabilité que cette pièce ait un défaut. Cette probabilité s'appelle **la probabilité conditionnelle de D sachant A et s'écrit $\boldsymbol{p_A(D)}$.**

f) La probabilité $p_A(D)$ calculée au (e) est égale à une des probabilités calculées en (d).

Laquelle ? $\boxed{p_A(D) = \qquad}$

3. Compléter cet arbre pondéré par des probabilités :



Exercice 2.10

Selon une enquête réalisée pour un site Internet, la proportion de gauchers en France serait de 12,7 % et parmi les gauchers il y aurait 6 hommes pour 4 femmes.

On choisit une personne au hasard en France.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité que la personne choisie soit droitière.
3. Calculer la probabilité que la personne choisie soit une femme gauchère.

Exercice 2.11

Dans un lycée, une enquête a montré que 95 % des lycéens ont un téléphone portable. Parmi eux, 25 % ont une connexion Internet associée à leur téléphone portable.

On choisit un élève au hasard dans ce lycée.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que l'élève choisi ait un téléphone portable et pas de connexion Internet associée.

Exercice 2.12

Une enquête parmi des élèves de premières et terminales ES indique que 60 % des élèves reconnaissent aimer les sciences économiques et sociales, 45 % aimer les mathématiques, 50 % aimer les sciences économiques et sociales mais pas les mathématiques.

On interroge au hasard un élève concerné par cette enquête.

On note :

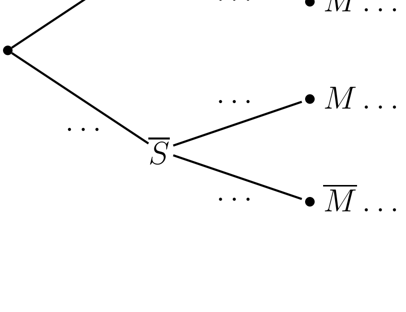
S l'événement « l'élève interrogé aime les sciences économiques et sociales »

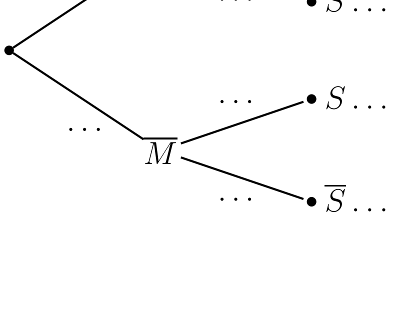
M l'événement « l'élève interrogé aime les mathématiques »

Répondre aux questions suivantes en complétant le tableau et les arbres pondérés ci-dessous selon les besoins. Si nécessaire, arrondir au millième près.

1. Déterminer
   a) la probabilité que cet élève n'aime pas les mathématiques ;
   b) la probabilité que cet élève aime les mathématiques mais pas les sciences économiques et sociales ;
   c) la probabilité que cet élève aime les sciences économiques et sociales sachant qu'il aime les mathématiques ;
2. Pour quelles questions a-t-on utilisé
   le tableau ? .... ; un arbre pondéré ? .... lequel ? ....

	M	$\overline{M}$	Total
S			
$\overline{S}$			
Total			





2.4 Partition de l'univers – Formule des probabilités totales

Exercice 2.13

Pour engager des stagiaires, une entreprise organise des tests de sélection. Parmi les candidats qui se présentent aux épreuves il y a 60 % de garçons. Après avoir pris connaissance des résultats aux tests, l'entreprise engage 70 % des garçons candidats et 80 % des filles candidates.

On choisit au hasard un candidat qui s'est présenté aux épreuves.

1. Tracer un arbre pondéré et un tableau de probabilité qui seront complétés au fur et à mesure.
2. Traduire les trois données sous forme de probabilité.
3. Calculer la probabilité que le candidat choisi soit un garçon et qu'il soit engagé comme stagiaire.
4. Calculer la probabilité que le candidat choisi soit une fille et qu'elle soit engagée comme stagiaire.
5. Calculer la probabilité que le candidat choisi soit engagé.
6. Sachant que le candidat choisi a été engagé, calculer la probabilité que ce soit un garçon. Arrondir à 0,01 près.

Exercice 2.14

À la cafétéria, dans la vitrine pâtisserie :
- 60 % des gâteaux sont à base de crème ;
- parmi ceux qui sont à base de crème, 30 % ont aussi des fruits ;
- parmi les gâteaux qui n'ont pas de crème, 80 % ont des fruits.

On prend un gâteau au hasard.

1. Montrer que la probabilité d'avoir un gâteau avec des fruits est égale à 0,50.
2. a) Le gâteau pris au hasard comporte des fruits. Quelle est la probabilité qu'il soit à base de crème ?
   b) Le gâteau pris au hasard ne comporte pas de fruits. Quelle est la probabilité qu'il soit à base de crème ?

Exercice 2.15

Dans l'ensemble des bovins d'un pays, on estime que 7 % sont atteint d'une maladie.

On effectue un test de dépistage et on sait que
- quand un animal est malade, le test est positif dans 87 % des cas ;
- quand un animal n'est pas malade, le test est négatif dans 98 % des cas.

On choisit un animal au hasard dans l'ensemble des bovins de ce pays. Calculer la probabilité qu'un bovin soit malade sachant qu'il a un test positif. Arrondir à 10^{-3} près.

Exercice 2.16

Dans une entreprise, on utilise des pièces venant de deux usines A et B. On sait que : 75 % des pièces viennent de l'usine A, 3 % des pièces produites dans l'usine A ont un défaut, 7 % de l'ensemble des pièces produites ont un défaut. On prélève une pièce au hasard dans l'ensemble des pièces.

On note p la probabilité qu'une pièce produites dans l'usine B ait un défaut, et
- A l'événement « la pièce prélevée au hasard provient de l'usine A » ;
- D l'événement « la pièce prélevée au hasard a un défaut ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminer la valeur de p en justifiant.

Exercice 2.17

Un laboratoire pharmaceutique propose un test de dépistage pour une maladie.

On désigne par x la proportion de personnes atteintes de cette maladie dans la population.

- la probabilité qu'une personne malade présente un test positif est $0,98$;
- la probabilité qu'une personne saine présente un test positif est $0,002$.

On note M l'événement « la personne choisie est malade » et T l'événement « le test est positif ».

1. Traduire l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.
2. Le laboratoire décide de commercialiser un test dès lors que la probabilité qu'une personne testée positivement soit malade est supérieure ou égale à $0,9$.

   À partir de quelle valeur de x le laboratoire commercialise-t-il le test correspondant ?

Exercice 2.18

Dans cet exercice, les probabilités demandées seront données sous forme décimale, éventuellement arrondies à 10^{-3} *près.* Lors d'une enquête réalisée auprès d'élèves de terminale, on apprend que 60 % des élèves sont des filles. De plus, 40 % des filles et 30 % des garçons fument.

1. On choisit un élève au hasard. On note A l'événement « l'élève choisi fume » et $p(A)$ la probabilité de cet événement. On note F l'événement « l'élève choisi est une fille ».

   Quelle est la probabilité que l'élève choisi au hasard :

   a) soit un garçon ?

   b) soit une fille qui fume ?

   c) soit un garçon qui fume ?
2. Déduisez des questions précédentes, en le justifiant, que $p(A) = 0,36$.
3. L'enquête permet de savoir que :
   - parmi les élèves fumeurs, la moitié ont des parents qui fument ;
   - parmi les élèves non fumeurs, 65 % ont des parents non fumeurs.

   On note B l'événement « l'élève choisi a des parents fumeurs ».

   a) Calculer les probabilités $p(A \cap B)$ et $p(\overline{A} \cap B)$.

   b) Déduisez en $p(B)$.

   c) Calculer $p_B(A)$ la probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents fumeurs.

   d) Calculer $p_{\overline{B}}(A)$ la probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents non fumeurs.

2.5 Loi de probabilité et espérance

Exercice 2.19

Une usine fabrique des moteurs. Chaque moteur est testé en fin de fabrication. Si le test est positif, le moteur est acheminé vers le client ; si le test est négatif, le moteur retourne en usine, où il est réparé, puis testé une seconde fois. Si, cette fois le test est positif, le moteur part chez le client mais si le test est négatif, le moteur est définitivement écarté et détruit.

Une étude statistique a permis de montrer que le test est positif pour 85 % des moteurs neufs sortis directement des chaînes de fabrication mais que, parmi les moteurs révisés, seulement 65 % d'entre eux passent le second test avec succés.

1. On choisit un moteur au hasard dans la chaîne de fabrication.

   a) Construire un arbre de probabilité illustrant les différents cas qui peuvent se présenter pour ce moteur.

b) Calculer la probabilité associée à chaque chemin de cet arbre.

2. La fabrication d'un moteur revient à 6 000 € auxquels il faut ajouter 1 000 € si le moteur est révisé. Un moteur est facturé au client 10 000 €. On appelle X la variable aléatoire égale au gain pour l'entreprise dans les différents cas (gain éventuellement négatif).

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance de X.

c) Quel gain l'entreprise peut-elle espérer pour 10 000 moteurs fabriquées ?

Exercice 2.20

Un magasin vend des salons de jardin.

Une enquête statistique a montré que :
- 10 % des personnes qui entrent dans le magasin achètent une table ;
- parmi les personnes qui achètent une table, 80 % achètent un lot de chaises ;
- parmi les personnes qui n'achètent pas de table, 10 % achètent un lot de chaises.

Une personne entre dans le magasin.

On note :
- T l'événement « La personne achète une table » ;
- C l'événement « La personne achète un lot de chaises » ;

1. Traduire à l'aide d'un arbre pondéré ou d'un tableau la situation décrite ci-dessus.

2. a) Montrer que la probabilité que la personne achète un lot de chaises est égale à 0,17.

b) Quelle est la probabilité que la personne n'achète pas de table sachant qu'elle a acheté un lot de chaises ? Arrondir au millième près.

3. Le bénéfice réalisé par table vendue est de 50 € et on appelle b le bénéfice en euros réalisé par lot de chaises.

On veut calculer le montant du bénéfice b pour réaliser en moyenne un bénéfice de 12 € par personne entrant dans le magasin.

a) On appelle X la variable aléatoire égale au montant du bénéfice réalisé par personne entrant dans le magasin.

Déterminer la loi de probabilité de X, en complétant le tableau suivant.

Montant X du bénéfice par client	0	50	b	$50+b$	Total
Probabilité					

b) Calculer l'espérance de X en fonction de b.

c) Calculer le bénéfice b pour réaliser en moyenne un bénéfice de 12 € par personne entrant dans le magasin.

2.6 Indépendance – Tirages successifs dans une urne

Exercice 2.21

L'objectif de cet exercice est de préciser ce que signifie des événements indépendants en probabilité.

Dans les ordinateurs fabriqués par une usine, 60 % sont du modèle A et 40 % du modèle B.

On sait que 5 % des ordinateurs du modèle A ont un défaut.

On choisit un ordinateur au hasard et on appelle
- A l'événement « L'ordinateur choisi est du modèle A. »
- D l'événement « L'ordinateur choisi a un défaut. »

1. **1er cas :** 10 % des ordinateurs du modèle B ont un défaut.
   a) Sans justifier, les événements A et D semblent-ils indépendants ?
   b) Indiquer sans justifier les probabilités $p(A)$, $p_A(D)$ et $p_B(D)$.
   c) Dresser un arbre pondéré représentant la situation.
   d) Calculer $p(A \cap D)$.
   e) Calculer $p(D)$.
   f) On dit que
   $\boxed{\text{les événements A et D sont indépendants si et seulement si } p(A \cap D) = p(A) \times p(D)}$.
   Vérifier par un calcul si les événements A et D sont indépendants ou non.
   g) Quand deux événements A et D sont indépendants on peut démontrer que $\boxed{p_A(D) = p(D)}$ ce qui voudrait dire ici que la probabilité qu'un ordinateur ait un défaut sachant qu'il est du modèle A, est la même que la probabilité qu'un ordinateur ait un défaut.
   Cette égalité est-elle vraie ici ?
2. **2e cas :** 5 % des ordinateurs du modèle B ont un défaut.
   a) Indiquer sans justifier les probabilités $p(A)$, $p_A(D)$ et $p_B(D)$.
   b) Dresser un arbre pondéré représentant la situation.
   c) Calculer $p(A \cap D)$.
   d) Calculer $p(D)$.
   e) Les événements A et D sont-ils indépendants ? Justifier.

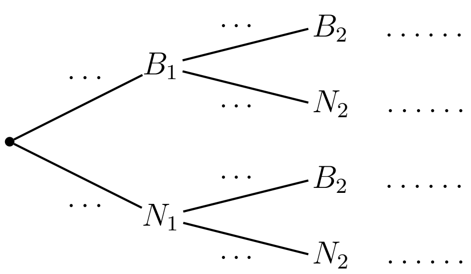
Exercice 2.22 (Tirages successifs dans une urne, sans remise)

Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On prend au hasard une boule, on ne la remet pas dans l'urne puis on prend à nouveau une boule au hasard. On appelle cela *deux tirages successifs sans remise.*

On note les événements

- B_1 « Obtenir une boule blanche au 1er tirage »
- N_1 « Obtenir une boule noire au 1er tirage »
- B_2 « Obtenir une boule blanche au 2e tirage »
- N_2 « Obtenir une boule noire au 2e tirage »

On pourra utiliser l'arbre et le tableau ci-dessous pour répondre au questions qui suivent.



1. Sans justifier, indiquer si les événements B_1 et B_2 semblent indépendants.
2. Calculer les probabilités des événements B_1, $B_1 \cap B_2$, B_2, puis calculer $p(B_1) \times p(B_2)$
3. Les événements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?

Exercice 2.23 (Tirages successifs dans une urne, avec remise)

Reprendre l'exercice précédent avec cette fois deux tirages successifs avec remise (après le premier tirage, on remet la boule dans l'urne avant d'effectuer le deuxième tirage).

Exercice 2.24 (Tirages successifs dans une urne, sans remise, avec des effectifs importants)
Une urne contient 1000 boules, 400 blanches et 600 noires. On effectue au hasard deux tirages successifs sans remise.

Les événements sont notés comme dans l'exercice 2.22.

1. Calculer les probabilités des événements B_1, $B_1 \cap B_2$, B_2, puis calculer $p(B_1) \times p(B_2)$
2. Comparer $p(B_1 \cap B_2)$ et $p(B_1) \times p(B_2)$.

Exercice 2.25 (Démonstration d'une propriété)

Démontrer que si deux événements A et B sont indépendants, alors les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Indications

- Dresser un arbre de probabilité.
- On sait que : $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A})$

2.7 Exercices de type bac

Exercice 2.26

À la suite d'un sondage effectué à propos de la construction d'un barrage, on estime que :

- 65 % de la population concernée est contre la construction, et parmi ces opposants, 70 % sont des écologistes ;
- parmi les personnes qui ne sont pas opposées à la construction, 20 % sont des écologistes.

On interroge une personne au hasard.

On définit les événements suivants :

- C : « la personne interrogée est contre la construction d'un barrage » ;
- E : « la personne interrogée est écologiste ».

Si nécessaire, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

1. D'après l'énoncé, sans aucun calcul, donner les valeurs des probabilités suivantes :
   $p_C(E)$, $p_{\overline{C}}(E)$, $p(C)$.
2. Dresser un arbre pondéré représentant la situation.
3. Décrire les événements $\overline{C}$ et $\overline{C} \cap E$.
4. Calculer la probabilité que la personne interrogée soit contre la construction et écologiste.
5. Démontrer que $p(E) = 0,525$.
6. La personne interrogée est écologiste. Calculer la probabilité que cette personne soit contre la construction.
7. Les événements C et E sont-ils indépendants ? Justifier.
8. On interroge 20 personnes au hasard dans la population concernée.
   a) Quelle est la probabilité que 5 personnes exactement soient écologistes ?
   b) Quelle est la probabilité que au plus 5 personnes soient écologistes ?

Exercice 2.27 (inspiré de l'ex. 4 du bac S de Pondichéry en avril 2013)

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent .
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,04$.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,24$.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'événement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'événement E_n.

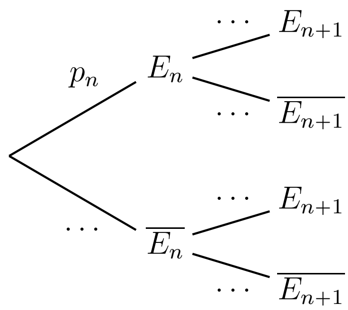
On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$.

1. a) Tracer un arbre pondéré qui représente la situation pour les événements E_1, $\overline{E_1}$, E_2, $\overline{E_2}$, E_3, $\overline{E_3}$.

b) Calculer la valeur de p_3.

c) Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

2. a) Compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous.



b) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.

c) Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.

d) En déduire l'expression de u_n en fonction de n, puis de p_n en fonction de n.

e) En déduire la limite de la suite (p_n).

f) Interpréter concrètement la limite précédente.

2.8 Pour réviser

Chapitre du livre n° 13 – Conditionnement et indépendance

Les exercices résolus

- ex 1 p 355 : calculer une probabilité conditionnelle
- ex 2 p 355 : traduire un énoncé en probabilités
- ex 5 p 357 : partition de l'univers / probabilités totales
- ex 10 p 359 : étudier l'indépendance de deux événements
- ex 11 p 359 : utiliser l'indépendance de deux événements

Rubrique *Pour s'exercer*, corrigés pages 468-469

- ex 3 p 355 : probabilités conditionnelles
- ex 4 p 355 : probabilités conditionnelles et probabilités d'intersection d'événements
- ex 6 p 357 : partition de l'univers / probabilités totales
- ex 12 et 13 p 359 : indépendance

Rubrique *Objectif bac*, corrigés pages 478

- ex 43 p 365 (QCM)
- ex 44 p 365 (vrai/faux)
- ex 45 p 365 (vrai/faux)
- ex 46 p 366 : problème de type bac, sur probabilité et suite

II Cours

2.1 Probabilité sur un ensemble fini (3^e, 2^{de})

Définition 2.1

Soit Ω l'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire.
Un événement est un ensemble d'issues de cette expérience aléatoire.
Une probabilité p attribue à chaque événement un nombre entre 0 et 1, c'est dire que pour tout événement A, on a : $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$.
Cette probabilité p vérifie les égalités suivantes : $p(\Omega) = 1 \qquad p(\varnothing) = 0$

Propriété 2.1 (Événement contraire)

Si $\overline{\mathrm{A}}$ est l'événement contraire de A, on a : $p(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - p(\mathrm{A})$

Définition 2.2 (Intersection et réunion d'événements)

- On dit que l'événement **A et B** se produit lorsque les deux événements se produisent simultanément. Cet événement s'écrit aussi $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ et s'appelle aussi **intersection** des événements A et B.
- On dit que l'événement **A ou B** se produit lorsque l'événement A se produit ou l'événement B se produit ou les deux à la fois (l'un ou l'autre ou les deux). Cet événement s'écrit aussi $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ et s'appelle aussi **réunion** des événements A et B.
- La notation $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ se lit « A inter B » et la notation $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ se lit « A union B »

Propriété 2.2

Pour tous événements A et B, on a : $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$

Définition 2.3 (Événements incompatibles)

Quand $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$, on dit que les événements A et B sont **incompatibles**.

Remarque : deux événements incompatibles sont deux événements qui ne peuvent pas se produire simultanément.

Propriété 2.3

Pour deux événements incompatibles A et B, on a : $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0$ et $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B})$.

Propriété 2.4

Quand les issues d'une expérience aléatoire sont équiprobables, la probabilité d'un événement est égale à : $\dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$

2.2 Répétition d'expériences identiques et indépendantes (1^{re} S)

En première, la répétition d'expériences identiques et indépendantes a été étudiée, en utilisant des arbres pondérés et la propriété ci-dessous, mais sans donner de définition mathématique de deux événements indépendants.

*La définition mathématique d'**événements indépendants** sera étudiée au paragraphe 2.7.*

Propriété 2.5

Dans le cas d'une répétition d'expériences identiques et indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat.

Exemple

On tire au hasard un nombre entier entre 0 et 9, puis une lettre au hasard, puis un signe au hasard parmi $\bigcirc$, $\diamondsuit$, $\triangle$.

Quelle est la probabilité d'obtenir le code `5F`$\triangle$?

Ces trois tirages au hasard sont indépendants donc :

$$\begin{aligned} p(\text{« Obtenir 5F}\triangle\text{ »}) &= p(\text{« Obtenir 5 »}) \times p(\text{« Obtenir F »}) \times p(\text{« Obtenir }\triangle\text{ »}) \\ &= \frac{1}{10} \times \frac{1}{26} \times \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{780}} \end{aligned}$$

2.3 Variable aléatoire discrète (1^re^ S)

2.3.a Définitions et propriétés

Définition 2.4 (Variable aléatoire discrète)

Une variable aléatoire discrète est une fonction qui associe à chaque issue d'une expérience aléatoire un nombre réel.

Définition 2.5 (Loi de probabilité d'une variable aléatoire)

La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète associe une probabilité à chaque valeur de la variable aléatoire. Cette loi est présentée par le tableau ci-contre.

X	x_1	x_2	...	x_n	Total
p	p_1	p_2	...	p_n	1

Définition 2.6 (Espérance, variance, écart-type)

X est une variable aléatoire discrète dont la loi de probabilité est donnée par le tableau ci-contre.

X	x_1	x_2	...	x_n	Total
p	p_1	p_2	...	p_n	1

Alors

- l'espérance mathématique de la variable aléatoire X, notée E(X), est définie par :
  $\mathrm{E(X)} = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$
- la variance de la variable aléatoire X, notée V(X), est définie par :
  $\mathrm{V(X)} = p_1\left(x_1 - \mathrm{E(X)}\right)^2 + p_2\left(x_2 - \mathrm{E(X)}\right)^2 + \cdots + p_n\left(x_n - \mathrm{E(X)}\right)^2$
- l'écart-type de la variable aléatoire X, noté σ(X), est défini par :
  $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathrm{V(X)}}$

Propriété 2.6 (Espérance et moyenne)

On répéte une expérience aléatoire, on note à chaque étape la valeur de la variable aléatoire, et on calcule la moyenne.

La moyenne de cette variable aléatoire se rapproche de son espérance lorsque le nombre de répétitions devient grand.

Propriété 2.7

Pour une variable aléatoire X et deux nombres a et b, on a les égalités suivantes :

$E(aX+b) = aE(X)+b \qquad V(aX) = a^2V(X) \qquad \sigma(aX) = |a| \times \sigma(X)$.

2.3.b Utilisation de la calculatrice (statistique)

Les commandes de la calculatrice pour déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type sont en fait des commandes de ***statistique****. Elles sont rappelées ci-dessous.*

Consignes et remarques pour tous les modèles : saisir les valeurs de la série statistique dans la première colonne et les effectifs ou les fréquences dans la deuxième colonne.

TI 82

Saisie des données : touche stats, puis choisir `1:Edite`

Calculs : appuyer à nouveau sur stats, choisir `CALC`, puis `1:Stats 1-Var`, puis compléter ainsi : `Stats 1-Var(`L_1`,`L_2`)` et valider.

Liste des résultats (appuyer sur les flèches pour descendre et monter dans la liste)

$\overline{\mathtt{x}}$ moyenne ; `n` effectif total ;

`minX` minimum ; `Q1` premier quartile ; `Méd` médiane ; `Q3` troisième quartile ; `maxX` maximum

TI89

Saisie des données

Appuyer sur la touche APPS, puis aller sur l'icône `Stats/List`, puis valider (touche ENTER).

Si une fenêtre nommée `Folder selection ...` apparaît, valider.

On voit :

list1	list2	list3	list4

Saisir les nombres de la série dans `list1` et les effectifs ou les fréquences dans `list2`.

Calculs

Appuyer sur la touche F4, on voit une liste déroulante.
Choisir `1:1-Var Stats...`, puis valider.

Une fenêtre s'ouvre, et on voit : `List:` `list1` `Freq:` `list2`

Modifier si nécessaire.
Appuyer une fois sur ENTER.
Les résultats apparaissent dans une fenêtre (voir à droite).
Pour descendre dans la liste des résultats, appuyer plusieurs fois sur la touche ↓.

	$\overline{x}$	=	moyenne
	Σx	=	somme
	Σx^2	=	
	Sx	=	
	σx	=	écart-type
	`n`	=	effectif total
	`MinX`	=	minimum
↓	`Q1X`	=	1^er^ quartile
	`MedX`	=	médiane
	`Q3X`	=	3^e^ quartile
	`MaxX`	=	maximum
	$\Sigma(x-\overline{x})^2$	=	

CASIO

Saisie des données

Touche MENU, icône STAT, valider, puis compléter les colonnes List 1 et List 2.

Calculs

Touche MENU, icône STAT, valider, puis appuyer sur F2 (CALC), puis sur F6 (SET), et compléter ainsi :

`1 Var X List : List1` (appuyer sur F1)   `1 Var Freq : List2` (appuyer sur F2)

Appuyer sur EXIT F1 (1 VAR)

Liste des résultats (appuyer sur les flèches pour descendre et monter dans la liste)

$\overline{\mathtt{x}}$ moyenne ; `n` effectif total ;

`minX` minimum ; `Q1` premier quartile ; `Méd` médiane ; `Q3` troisième quartile ; `maxX` maximum

2.4 Loi binomiale (1^{re} S)

2.4.a Épreuve de Bernoulli

Définition 2.7

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui n'a que deux issues, l'une appelée succès S, l'autre échec $\overline{S}$.

Exemples d'épreuves de Bernoulli

- On joue à pile ou face et on convient que pile est le succès et face l'échec.
- Des pièces fabriquées par une usine ont une probabilité d'être en état de marche de 97 %. Le succès est l'état de marche avec une probabilité de 0,97 et l'échec est la présence de défaut avec une probabilité de 0,03.

Exemples d'expériences aléatoires qui ne sont pas des épreuves de Bernoulli

Quand une expérience aléatoire a plus de deux issues, ce n'est pas une épreuve de Bernoulli, par exemple :

- on lance un dé et on note le numéro obtenu (6 issues) ;
- avant une élection, on interroge une personne au hasard et on lui demande si elle souhaite voter pour le candidat A, B, ou C (3 issues).

2.4.b Schéma de Bernoulli et loi binomiale

Définition 2.8 (Schéma de Bernoulli)

Un schéma de Bernoulli est une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Définition 2.9 (Loi binomiale)

On peut dire qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p lorsque les conditions suivantes sont respectées.

- Une expérience aléatoire n'a que deux issues, avec une probabilité de succès égale à p ;
- cette expérience est répétée n fois de manière identique et indépendante ;
- X est la variable aléatoire égale au nombre de succès.

Définition 2.10 (Coefficient binomial)

On représente un schéma de Bernoulli, répétition de n épreuves de Bernoulli à l'aide d'un arbre.
Pour tout entier k compris entre 0 et n, le nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès pour n répétitions se note $\binom{n}{k}$ et est appelé coefficient binomial.

Définition 2.11 (Formule générale de la loi binomiale)

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p,
alors pour tout entier k entre 0 et n, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Propriété 2.8 (Espérance, variance et écart-type de la loi binomiale)

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p,
alors : $E(X) = np$ $V(X) = np(1-p)$ $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

2.4.c Coefficient binomial à la calculatrice

Exemple : $\binom{6}{2} = 15$

Avec une TI 82 : $\boxed{6}$ $\boxed{\text{math}}$ $\boxed{\leftarrow}$ $\boxed{3}$ (Combinaison) $\boxed{2}$ $\boxed{\text{entrer}}$ Affichage : `6 Combinaison 2`

Avec une TI 89 : $\boxed{\text{HOME}}$ $\boxed{\text{2ND}}$ [MATH]

Dans les menus, choisir `7:Probability`, puis `3:nCr` Compléter ainsi : `nCr(6,2)`

Avec une CASIO : $\boxed{\text{OPTN}}$ $\boxed{\text{F6}}$ $\boxed{\text{F3}}$ (PROB) $\boxed{6}$ $\boxed{\text{F3}}$ (nCr) $\boxed{2}$ $\boxed{\text{EXE}}$

Avec une NUMWORKS

- aller dans l'application `Calculs`
- appuyer sur la touche Toolbox $\boxed{\text{paste''}}$
- descendre sur `Dénombrement`
- appuyer sur $\boxed{\rightarrow}$
- choisir `binomial(n,k)`
- appuyer sur $\boxed{\text{EXE}}$
- compléter ainsi : $\binom{6}{2}$
- appuyer sur $\boxed{\text{EXE}}$

2.4.d Loi binomiale à la calculatrice

Avec une calculatrice TI 82 Advanced ou TI 83 Premium

1. $\boxed{\boldsymbol{p(X = k)}}$

   Calculer une probabilité, par exemple calculer P(X = 2) pour une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,3$.
   - Appuyer sur $\boxed{\text{2nde}}$ [distrib]
   - Descendre jusqu'à `binomFdp(` et appuyer sur $\boxed{\text{entrer}}$.
   - Compléter l'écran ainsi :
     ```
     nbreEssais:6
     p:0.3
     valeur de x:2
     ```
   - Appuyer deux fois sur $\boxed{\text{entrer}}$
   - On voit alors : `binomFdp(6,0.3,2)` Appuyer sur $\boxed{\text{entrer}}$

2. $\boxed{\boldsymbol{p(X \leqslant k)}}$

   Calculer par exemple $P(X \leqslant 2)$ pour une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,3$.
   Procéder comme pour P(X = 2) ci-dessus en choisissant `binomFRép(` au lieu de `binomFdp(`.

Avec un modèle plus ancien de calculatrice TI 82

- $\boxed{\boldsymbol{p(X = k)}}$

  Pour calculer $P(X = 2)$ pour une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,3$.

  $\boxed{\text{2nde}}$ [distrib], descendre sur `binomFdp`, compléter ainsi : `binomFdp(6,0.3,2)`, puis $\boxed{\text{entrer}}$.

  À retenir : $\boxed{P(X = k) = \texttt{binomFdp}(n,p,k)}$

- $\boxed{\boldsymbol{p(X \leqslant k)}}$

  Pour calculer $P(X \leqslant 2)$ pour une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,3$, procéder comme pour P(X = 2) ci-dessus en choisissant `binomFRép(` au lieu de `binomFdp(`.

  À retenir : $\boxed{P(X \leqslant k) = \texttt{binomFRép}(n,p,k)}$

Avec une calculatrice CASIO

Ces calculatrices donnent directement la loi de probabilité dans un tableau.

$\boxed{\text{MENU}}$ choisir STAT, puis appuyer sur $\boxed{\text{F5}}$ (DIST) $\boxed{\text{F5}}$ (BINM) $\boxed{\text{F1}}$ (BPd)

Compléter alors l'écran ainsi : devant `Numtrial` : saisir n, et devant `P` : saisir p.

Avec une calculatrice NUMWORKS

- aller dans l'application `Probabilités`
- appuyer sur $\boxed{\text{EXE}}$
- saisir les valeurs de n et p
- sur `Suivant`, appuyer sur $\boxed{\text{EXE}}$
- avec la touche $\boxed{\leftarrow}$, aller sur le petit logo à gauche
- appuyer sur $\boxed{\downarrow}$
- on peut alors choisir dans l'ordre un calcul du type :
  $P(X \leqslant k)$ ou $P(k_1 \leqslant X \leqslant k_2)$ ou $P(X \geqslant k)$ ou $P(X = k)$.

2.4.e Loi binomiale avec des logiciels

Dans le tableur de LibreOffice : $\boxed{\text{=LOI.BINOMIALE(k ;n ;p ;0)}}$ (remplacer k par une référence de cellule, remplacer n et p par leurs valeurs).

Dans GeoGebra : dans la ligne de saisie $\boxed{\text{Binomiale[n,p]}}$ (remplacer n et p par leurs valeurs).

2.5 Probabilité conditionnelle

2.5.a Définition et propriété

Définition 2.12

Si $p(A) \neq 0$, on appelle la *probabilité conditionnelle de l'événement B sachant A* le nombre, noté $p_A(\mathrm{B})$ défini par : $p_A(\mathrm{B}) = \dfrac{p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{p(\mathrm{A})}$

Conséquence de cette définition :

Propriété 2.9 (Probabilité de l'intersection de deux événements)

$p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \times p_A(\mathrm{B})$

2.5.b Arbre pondéré

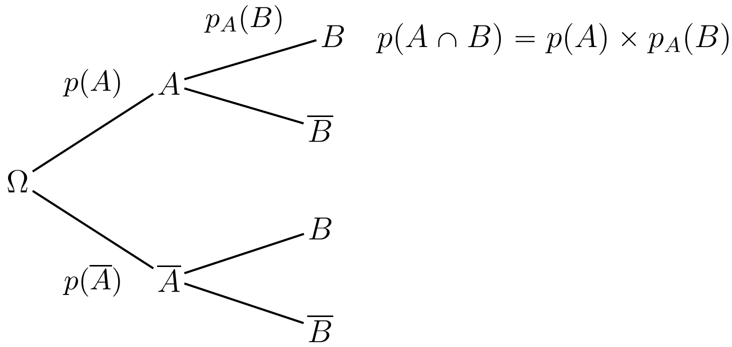
Règles et vocabulaire sur les arbres pondérés

- L'origine de l'arbre est Ω (ensemble des issues possible de l'expérience aléatoire).
- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité inscrite sur une branche entre deux événement A et B est la probabilité conditionnelle de B sachant A.
  $$\mathrm{A} \bullet\!\xrightarrow{\quad p_A(B)\quad}\!\bullet \mathrm{B}$$
- Une succession de plusieurs branches avec leurs événements est un **chemin**. Au bout d'un chemin se trouve une feuille, qui correspond à l'intersection des événements rencontrés sur ce chemin.

- La probabilité d'un événement correspondant à un chemin est égal au produit des probabilités inscrites sur chaque branche de ce chemin.

événement	probabilité
A ∩ B	$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$

Schéma



Exemple : exercice sur fiche n° 2.9

2.5.c Tableau de probabilités

Ci-dessous, le tableau de probabilités correspondant à l'arbre pondéré précédent

	B	$\overline{B}$	Total
A	$p(A \cap B)$	$p(A \cap \overline{B})$	$p(A)$
$\overline{A}$	$p(\overline{A} \cap B)$	$p(\overline{A} \cap \overline{B})$	$p(\overline{A})$
Total	$p(B)$	$p(\overline{B})$	1

Règles de calcul dans un tableau de probabilités

- Dans une case du tableau qui se trouve à l'intersection d'une rangée et d'une colonne on écrit la probabilité de l'intersection des événements correspondants.
- La somme des probabilités d'une rangée est dans la colonne de droite.
- La somme des probabilités d'une colonne est dans la rangée du bas.
- Dans la colonne de droite, et dans la rangée du bas, la somme des probabilités est 1

2.6 Exercice corrigé – Partition de l'univers

2.6.a Corrigé

Corrigé de l'exercice sur fiche n° 2.13

Énoncé

Pour engager des stagiaires, une entreprise organise des tests de sélection. Parmi les candidats qui se présentent aux épreuves il y a 60 % de garçons. Après avoir pris connaissance des résultats aux tests, l'entreprise engage 70 % des garçons candidats et 80 % des filles candidates.

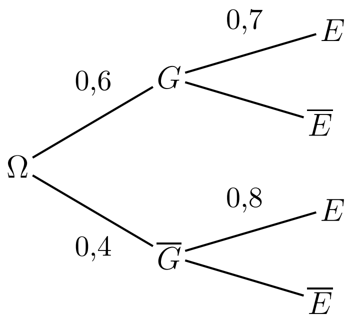
On choisit au hasard un candidat qui s'est présenté aux épreuves.

Correction

On nomme

- G l'événement « le candidat choisi est un garçon » ;
- E l'événement « le candidat choisi est engagé ».

Arbre pondéré représentant la situation



$p(G \cap E) = 0,6 \times 0,7 = 0,42$

$p(\overline{G} \cap E) = 0,4 \times 0,8 = 0,32$

Tableau de probabilités

	E	$\overline{E}$	Total
G	0,42		0,6
$\overline{G}$	0,32		0,4
Total	0,74		1

1. **Probabilité que le candidat choisi soit un garçon et qu'il soit engagé comme stagiaire :** $p(G \cap E) = p(G) \times p_G(E) = 0,6 \times 0,7 = \boxed{0,42}$
2. **Probabilité que le candidat choisi soit une fille et qu'elle soit engagée comme stagiaire :** $p(\overline{G} \cap E) = p(\overline{G}) \times p_{\overline{G}}(E) = 0,4 \times 0,8 = \boxed{0,32}$
3. **Probabilité que le candidat choisi soit engagé.**
   Comme l'indique le tableau de probabilités, on a :
   $p(E) = p(G \cap E) + p(\overline{G} \cap E) = 0,42 + 0,32 = \boxed{0,74}$
4. **Sachant que le candidat choisi a été engagé, probabilité que ce soit un garçon.**
   $p_E(G) = \dfrac{p(G \cap E)}{p(E)} = \dfrac{0,42}{0,74} \approx \boxed{0,568}$

2.6.b Partition de l'univers – Probabilités totales

Revenons sur le calcul effectué à la question 3. dans le corrigé ci-dessus :
$p(E) = p(G \cap E) + p(\overline{G} \cap E) = 0,42 + 0,32 = \boxed{0,74}$

On dit que les événements G et $\overline{G}$ forment une *partition* de l'univers Ω et qu'on a calculé la probabilité de l'événement E en utilisant cette partition.

L'égalité $p(E) = p(G \cap E) + p(\overline{G} \cap E)$ s'appelle la *formule des probabilités totales*.

Le programme de terminale S indique qu'un élève doit savoir calculer la probabilité d'un événement comme l'événement E, mais qu'on ne lui demande pas de connaître le vocabulaire *partition* et *formule des probabilités totales*.

2.7 Indépendance

Définition 2.13

Dire que deux événements A et B sont indépendants signifie que $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B})$

Conséquence de la définition :

Propriété 2.10

Si deux événements A et B sont indépendants et si $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$
alors $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = p(\mathrm{B})$ et $p(\mathrm{A}) = p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$

Remarque

Ainsi la probabilité d'obtenir l'événement B sachant que A est réalisé est égale à la probabilité d'obtenir l'événement B. Intuitivement, cela signifie bien que **B ne dépend pas de A**.

De même A ne dépend pas de B, et cela correspond bien à l'idée que A et B sont indépendants.

Propriété 2.11 (Tirages successifs dans une urne)

Dans une urne contenant des boules de couleurs différentes, on effectue au hasard plusieurs tirages successifs.

- Si on effectue ces tirages **avec remise**, les tirages successifs sont **indépendants** ;
- si on effectue ces tirages **sans remise**, les tirages successifs **ne sont pas indépendants** ;
- si on effectue ces tirages **sans remise**, mais que dans l'urne **le nombre de boules est très élevé**, on peut approximativement considérer que les tirages successifs sont **indépendants**.

Le programme indique qu'un élève doit savoir démontrer la propriété ci-dessous.

Propriété 2.12

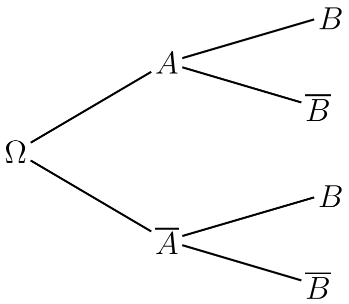
Si deux événements A et B sont indépendants, alors les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration (à connaître)

Nous savons que deux événements A et B sont indépendants, ce qui signifie que :

$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Nous voulons démontrer qu'alors $\overline{A}$ et B sont indépendants, c'est à dire : $p(\overline{A} \cap B) = p(\overline{A}) \times p(B)$.



On sait que : $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A})$

Donc :

$$\begin{aligned} p(B \cap \overline{A}) &= p(B) - p(B \cap A) && \text{or } p(B \cap A) = p(B) \times p(A). \\ &= p(B) - p(B) \times p(A) && \text{(on peut mettre } p(B) \text{ en facteur)} \\ &= p(B) \times (1 - p(A)) && \text{or } 1 - p(A) = p(\overline{A}) \\ &= p(B) \times p(\overline{A}) \end{aligned}$$

Chapitre 3

Limite et continuité d'une fonction

I Exercices

3.1 Limite en $+\infty$ et en $+\infty$

Exercice 3.1

Compléter ci-dessous, sans justifier.

1. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x = \ldots\ldots$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = \ldots\ldots$ **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = \ldots\ldots$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = \ldots\ldots$

2. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = \ldots\ldots$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = \ldots\ldots$ **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^3} = \ldots\ldots$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \ldots\ldots$

Exercice 3.2

Pour chacune des fonctions définies ci-dessous, calculer chaque fois sa limite lorsque x tend vers $+\infty$.

1. a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + 3$ **b)** $f(x) = 2 - 9x^3$ **c)** $f(x) = x^2 + 8\sqrt{x}$ **d)** $f(x) = 3x^2 - 5x^3$

2. a) $f(x) = \sqrt{x}\left(\dfrac{1}{x} - 4\right)$ **b)** $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+3}$

Exercice 3.3

D'après les tableaux de valeurs des fonctions f, g, h, k ci-dessous, quelles sont apparemment : les limites de $f(x)$, de $g(x)$, de $h(x)$, de $k(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

x	$f(x)$
10	125
1000	1002995
100000	10000299995
10000000	100000029999995

x	$g(x)$
10	3,312500
1000	4,973161
100000	4,999730
10000000	4,999997

x	$h(x)$
10	$-20,750000$
1000	$-8,051308$
100000	$-8,000510$
10000000	$-8,000005$

x	$k(x)$
10	$-33,16625$
100000	$-1000,49988$
1000000000	$-100000,00500$
10000000000000	$-10000000,00005$

Exercice 3.4

La fonction f est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$.

1. Déterminer la limite ℓ de f en $+\infty$ (c'est à dire lorsque x tend vers $+\infty$).

2. Tracer sur l'écran de la calculatrice
- la droite (d) d'équation $y = \ell$;
- la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de cette fonction.

3. Que constate-t-on pour cette droite et cette courbe ?

On dit que la droite (d) d'équation $y = \ell$ est une **asymptote horizontale** à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

Dans le paragraphe 3.1.b du cours, voir *Interprétation graphique*.

Exercice 3.5

Dans l'exercice 3.2, dans quels cas a-t-on eu des asymptotes horizontale en $+\infty$?

Dans ces cas là, indiquer chaque fois le numéro de question et l'équation $y = \ell$.

Remarque : Jusqu'ici nous avons étudié des limites de fonctions lorsque x vers $+\infty$, ce qui fait que nous avons pu réutiliser les limites de suites, en effet, par exemple, les deux limites suivantes sont égales : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}+3\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+3\right)$.

Nous allons maintenant étudier des limites de fonctions lorsque x vers $-\infty$, ce qui ne se produit pas pour des suites, puisque n est un entier naturel et ne peut donc pas tendre vers $-\infty$.

Exercice 3.6

Compléter ci-dessous, sans justifier, mais, si c'est nécessaire, on pourra vérifier à la calculatrice avec la commande `table` ou `graphe`.

1. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} x = \dots\dots$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = \dots\dots$ **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = \dots\dots$ **d)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = \dots\dots$

2. Pour un entier naturel n non nul, que peut-on donc dire de $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n$?

3. **a)** $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = \ldots$ **b)** $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \ldots$ **c)** $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right) = \ldots$ **d)** $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^4}\right) = \ldots$

4. Pour un entier naturel n non nul, que peut-on donc dire de $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^n}\right)$?

5. Dans les questions ci-dessus les limites de $\sqrt{x}$ et de $\frac{1}{\sqrt{x}}$ lorsque x tend vers $-\infty$ ne sont pas demandées. Pourquoi ?

Exercice 3.7

Pour chacune des fonctions définies ci-dessous, calculer chaque fois sa limite lorsque x tend vers $-\infty$.

1. **a)** $f(x) = 6 + \frac{1}{x}$ **b)** $f(x) = 3 + x^3$ **c)** $f(x) = 8x^2$ **d)** $f(x) = 7 + \frac{2}{x+1}$

2. **a)** $f(x) = x^3 - x^2$ **b)** $f(x) = 7x - 4x^2$ **c)** $f(x) = \frac{3x-4}{x+2}$

Exercice 3.8

Pour chacune des fonctions définies ci-dessous, calculer chaque fois ses limites lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$.

1. $f(x) = -5x^3$ **2.** $f(x) = 7x^2$ **3.** $f(x) = 9 - \frac{1}{x}$ **4.** $f(x) = x^2 + x^3$ **5.** $f(x) = \frac{5x+3}{x+1}$

Exercice 3.9

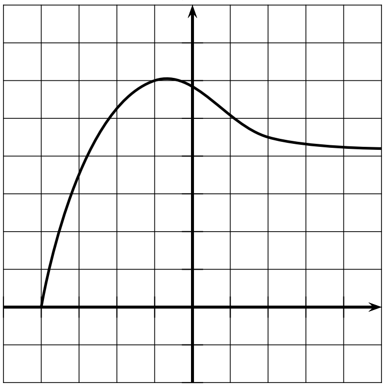
1. D'après les représentations graphiques ci-dessous, compléter les tableaux suivants en indiquant les limites et les éventuelles asymptotes.

2. Tracer les asymptotes lorsqu'il y en a.

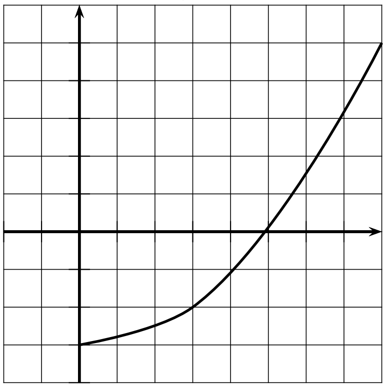
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$
Limite lorsque x tend vers $+\infty$						
Y a-t-il une asymptote ?						

	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$
Limite lorsque x tend vers $-\infty$			
Y a-t-il une asymptote ?			

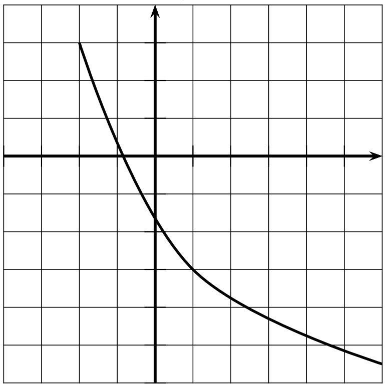
f_1



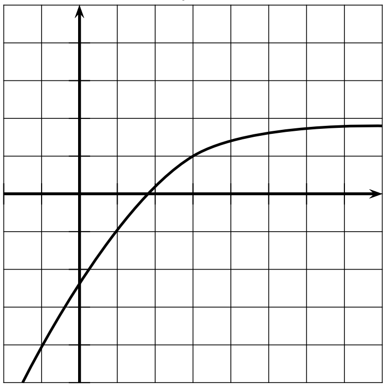
f_2



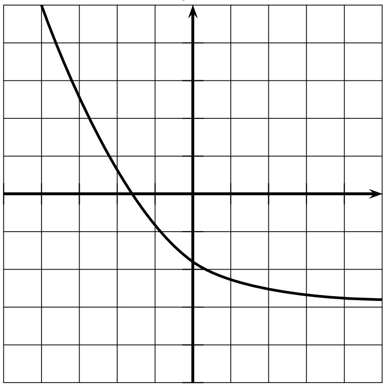
f_3



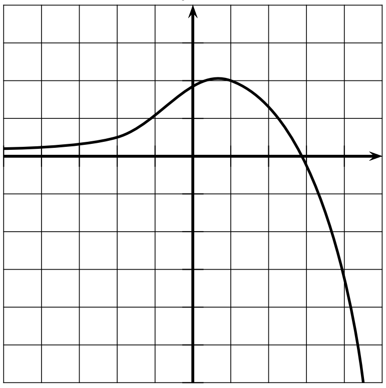
f_4



f_5



f_6



3.2 Limite infinie en un point

Remarques

- L'expression « en un point » signifie « lorsque x tend vers un nombre réel a ».
- Jusqu'ici nous avons étudié des limites de fonctions lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Nous allons maintenant étudier des limites de fonctions lorsque x tend vers un nombre réel a.

Exercice 3.10

La fonction f est définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ sur $]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$.

Cette fonction est une fonction de référence et l'objectif de cet exercice est d'étudier le comportement de $\dfrac{1}{x^2}$ quand x tend vers zéro.

1. Dans les tableaux ci-dessous, les valeurs de x sont de plus en plus proches de zéro. Compléter ces tableaux et indiquer quelle est apparemment le comportement de $\dfrac{1}{x^2}$ quand x tend vers zéro.

x	0,1	0,01	$0,001$	0,000 1
$\dfrac{1}{x^2}$				

x	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$	$-0{,}000\,1$
$\dfrac{1}{x^2}$				

Il semble donc que $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = \ldots\ldots$

2. Quelle est la conséquence lorsque x tend vers zéro pour la représentation graphique ? Vérifier à la calculatrice.

Exercice 3.11

La fonction f est définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$.

Cette fonction est aussi une fonction de référence nous allons étudier le comportement de $\dfrac{1}{x}$ quand x tend vers zéro.

1. Compléter ces tableaux et indiquer comment se comporte $\dfrac{1}{x}$ quand x tend vers zéro.

x	0,1	0,01	$0,001$	0,000 1
$\dfrac{1}{x}$				

x	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$	$-0{,}000\,1$
$\dfrac{1}{x}$				

2. Quelle est la conséquence lorsque x tend vers zéro pour la représentation graphique ? Vérifier à la calculatrice.

Exercice 3.12

La fonction f est définie par $f(x) = 2 + \dfrac{1}{(x-3)^2}$ sur $]-\infty\ ;\ 3[\ \cup\ ]3\ ;\ +\infty[$.

Nous allons étudier le comportement de $f(x)$ quand x tend vers 3 et interpréter cela graphiquement.

1. Comportement de $f(x)$ quand x tend vers 3

a) Compléter les tableaux ci-dessous.

x	3,1	3,01	$3,001$	3,000 1
$f(x)$				

x	$2,9$	$2,99$	$2,999$	2,999 9
$f(x)$				

b) Comment se comporte $f(x)$ quand x tend vers 3 ?

2. Interprétation graphique

Suivre les consignes ci-dessous avec sa calculatrice.

a) Tracer la courbe de f à l'écran.

b) Tracer la droite d'équation $x = 3$ en suivant les consignes ci-dessous.

- Sur TI :
  $\boxed{\text{2nde}}$ [quitter] $\boxed{\text{2nde}}$ [dessin] choisir `4:Verticale`
  compléter ainsi : `Verticale 3`, puis $\boxed{\text{entrer}}$
- Sur CASIO :
  Quitter l'écran graphique : $\boxed{\text{EXIT}}$
  Si la fonction f a été définie en `Y1`, faire ce qui suit en `Y2`
  $\boxed{\text{F3}}$ (`TYPE`) $\boxed{\text{F4}}$ (`X=`) $\boxed{\text{3}}$ $\boxed{\text{EXE}}$ et on voit alors : `X2=3`
  Tracer cette droite : $\boxed{\text{F6}}$ (`DRAW`)

c) Que peut-on dire de la courbe de f et de la droite d'équation $x = 3$?

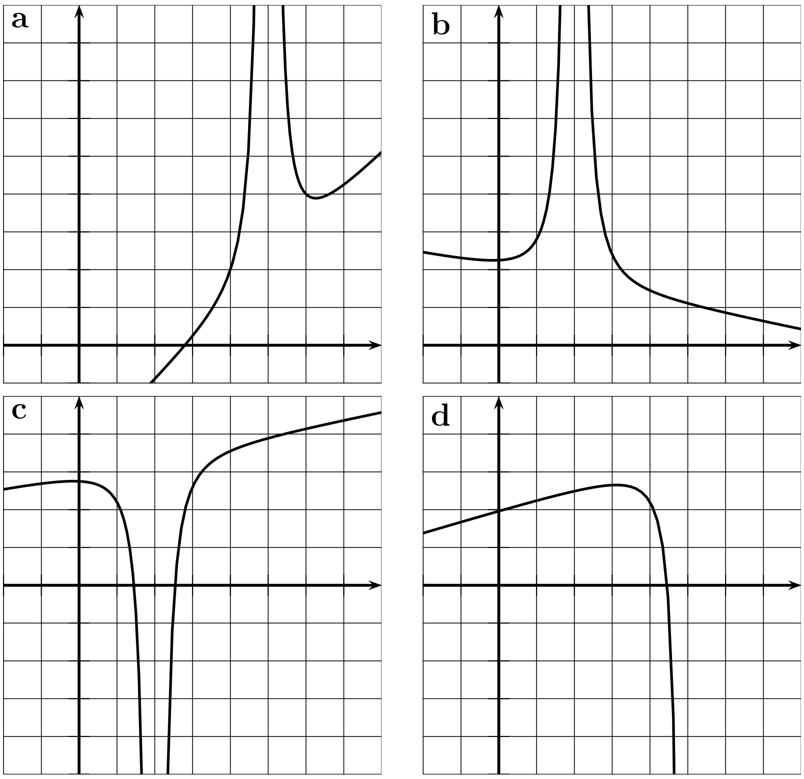
Exercice 3.13

Pour chacun des graphiques ci-dessous (a, b, c, d), indiquer la limite correspondante.

Une des limites ne correspond à aucun des graphiques.

1. $\lim\limits_{x \to 2}(f(x)) = -\infty$ **2.** $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x > 5}}(f(x)) = -\infty$ **3.** $\lim\limits_{x \to 2}(f(x)) = +\infty$

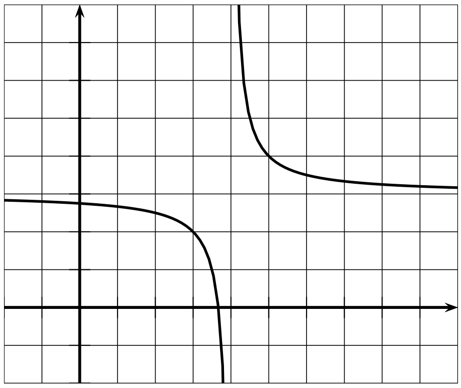
4. $\lim\limits_{x \to 5}(f(x)) = +\infty$ **5.** $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x < 5}}(f(x)) = -\infty$



3.3 Limite en un point et en l'infini

Exercice 3.14

La fonction f est définie par $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x-4}$ sur $]-\infty\ ;\ 4[\ \cup\ ]4\ ;\ +\infty[$.



1. Calculer les limites suivantes en justifiant :

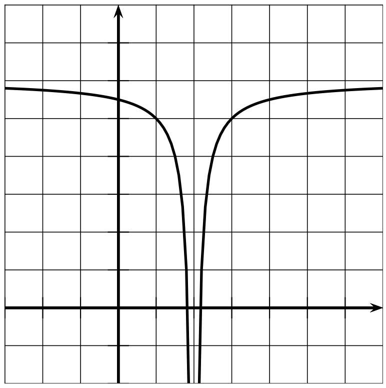
   a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x))$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x))$

   c) $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}}(f(x))$ **d)** $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x<4}}(f(x))$

2. Tracer les asymptotes et donner leurs équations.

Exercice 3.15

La fonction f est représentée ci-contre.



1. Parmi les propositions suivantes, entourer celles qui sont vraies et barrer celles qui sont fausses.

   a) $\lim\limits_{x\to2}(f(x)) = -\infty$ **b)** $\lim\limits_{x\to6}(f(x)) = -\infty$

   c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)) = 2$ **d)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)) = 6$

   e) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)) = 6$

2. Tracer les asymptotes et donner leurs équations.

Exercice 3.16

1. La fonction f a les propriétés suivantes.

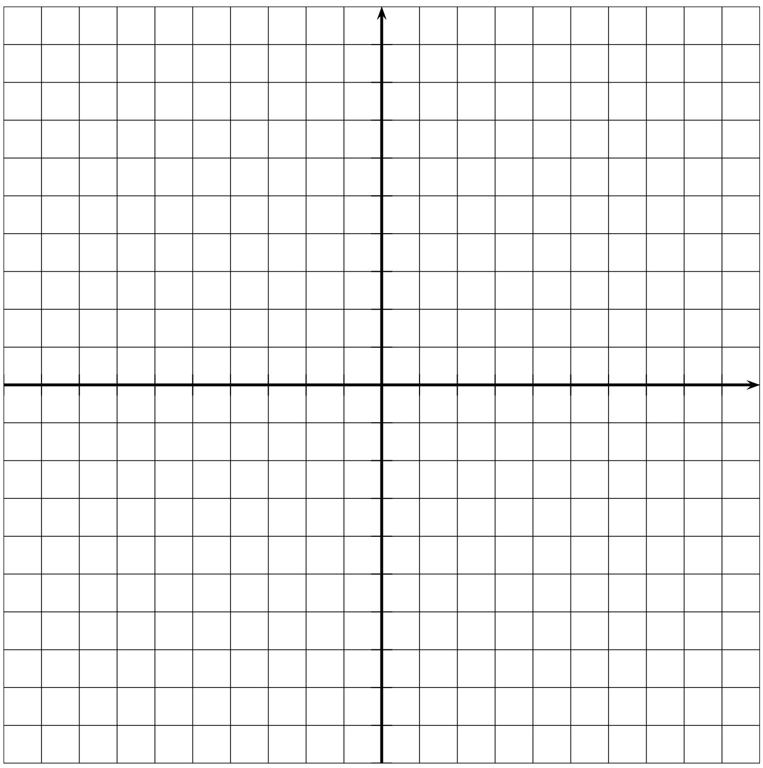
   $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)) = 2$

   $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)) = 2$

   $\lim\limits_{\substack{x\to6\\x<6}}(f(x)) = +\infty$

   $\lim\limits_{\substack{x\to6\\x>6}}(f(x)) = -\infty$

   Dans le repère ci-contre, tracer une représentation graphique possible de la fonction f.



2. Tracer les asymptotes et donner leurs équations.

Exercice 3.17

D'après les tableaux de variations ci-dessous tracer schématiquement plus bas les représentations graphiques des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4. Tracer les asymptotes quand il y en a.

On précise que les tableaux ci-dessous indiquent que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = 0$

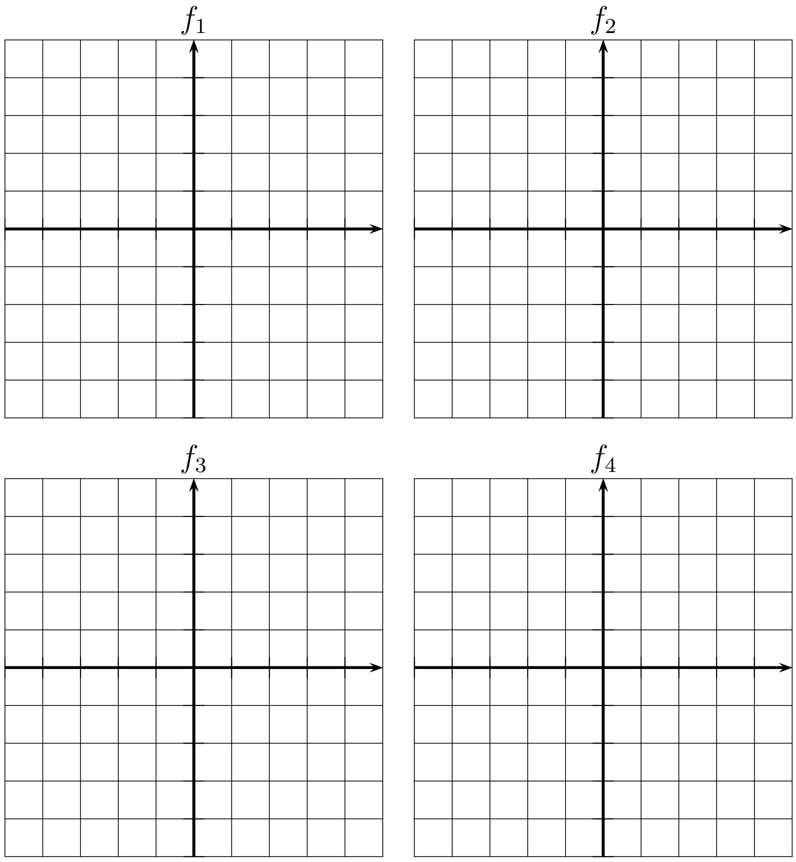
$\lim\limits_{x\to-\infty} f_3(x) = 2$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_3(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f_4(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_4(x) = -\infty$

x	0		$+\infty$
$f_1(x)$	3	$\searrow$	$-\infty$

x	-4		$+\infty$
$f_2(x)$	-2	$\nearrow$	0

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_3(x)$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_4(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	$-\infty$



3.4 Limite d'une composée de deux fonctions

Exercice 3.18

La fonction f est définie par $f(x) = \sqrt{4x^3 + 6x}$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

1. Conjecturer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.
2. Lire le paragraphe 3.4 du cours, et ses exemples.
3. Justifier la conjecture du **1.**

3.5 Exercices divers sur les limites

Exercice 3.19

Déterminer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2-1}{x+4}\right)$ **2.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^2+4x^3-8)$ **3.** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(7+\dfrac{1}{x}\right)$ **4.** $\lim\limits_{x\to0}\left(\sqrt{6+\dfrac{1}{x^2}}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5x\sqrt{x^3+9}\right)$ **6.** $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{4}{(x-3)^2}\right)$

Exercice 3.20

Déterminer les limites suivantes en justifiant.

1. a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5-\dfrac{1}{x^2}}{\sqrt{x}}\right)$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{6+\dfrac{1}{x}}{x^2+1}\right)$

2. Limite de $\dfrac{6}{x-2}$ quand x est supérieur à 2 et tend vers 2.

3. Limite de $\dfrac{4}{x-3}$ quand x est inférieur à 3 et tend vers 3.

Exercice 3.21

Déterminer les limites suivantes, en justifiant.

1. a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}+5\right)$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right)$

2. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$ c'est à dire limite de $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$ quand x est positif et tend vers 0.

Exercice 3.22

La fonction f est définie par $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$ sur $]2\ ;\ +\infty[$

1. Justifier par un calcul que pour tout réel x de l'intervalle $]2\ ;\ +\infty[$, $f(x)=3+\dfrac{7}{x-2}$

2. Déterminer les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, et lorsque est supérieur à 2 et tend vers 2.

3. D'après les résultats sur les limites, quelles sont les droites asymptotes à la courbe représentative de la fonction f ?

4. Calculer la dérivée de f.

5. Sans justifier, dresser un tableau qui donne le signe de la dérivée, les variations de la fonction f et les limites.

6. Vérifier en traçant la courbe sur l'écran de la calculatrice.

3.6 Limite et comparaison

Exercice 3.23

1. Soit une fonction f_1 définie sur $[0\,;\,+\infty[$, telles que pour tout nombre x de cet intervalle $f_1(x) \geqslant x^2$. Que peut-on en déduire pour la fonction f_1 lorsque x tend vers $+\infty$?
2. Soit une fonction f_2 définie sur $[0\,;\,+\infty[$, telles que pour tout nombre x de cet intervalle $f_2(x) \leqslant -x^3$. Que peut-on en déduire pour la fonction f_2 lorsque x tend vers $+\infty$?

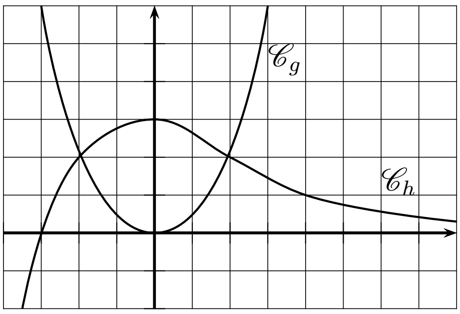
Exercice 3.24

Soit une fonction f telle que pour tout nombre réel x, $\quad x-1 \leqslant f(x) \leqslant x^2$

1. Peut-on en déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?
2. Peut-on en déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$?
3. Tracer un repère, tracer les représentations graphiques des fonctions $x \longmapsto x-1$, $x \longmapsto x^2$, puis tracer une représentation graphique possible de la fonction f.

Exercice 3.25

Dans le repère ci-dessous, d'unité 1 carreau, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ sont des courbes de deux fonctions définies sur $]-\infty\,;\,+\infty[$.



1. D'après les représentions graphique, quelles sont apparemment les limites de $g(x)$ et de $h(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers $+\infty$?
   On admettra que ces limites sont vraies.
2. Si f est une fonction définie sur $]-\infty\,;\,+\infty[$ telle que, pour tout réel x, on a $f(x) \geqslant g(x)$, peut-on en déduire les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$? Si oui, les donner.
3. Si k est une fonction définie sur $]-\infty\,;\,+\infty[$ telle que, pour tout réel x, on a $k(x) \leqslant h(x)$, peut-on en déduire les limites de $k(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$? Si oui, les donner.

3.7 Continuité

Exercice 3.26

L'objectif de cet exercice est d'étudier ce qu'est une fonction continue et ce qu'est une fonction non continue.

1. **1re situation :** on considère l'intensité du courant électrique (en Ampères) passant dans une ampoule pendant 15 secondes. Dans le repère qui se trouve plus bas, tracer la représentation graphique de cette intensité électrique en fonction du temps d'après les explications ci-dessous. On appelle cette fonction f.

- Pendant les 5 premières secondes la lampe est éteinte ;
- à la 5^{e} seconde quelqu'un allume et le courant passe brutalement de 0 à 0,5 Ampères ;
- de la 5^{e} seconde à la 10^{e} la lampe est allumée ;
- à la 10^{e} seconde il éteint et le courant passe brutalement de 0,5 à 0 A ;
- ensuite l'ampoule reste éteinte.

2. 2^{e} situation : même consigne que dans la question précédente pour une autre ampoule, pendant 15 secondes, d'après les explications ci-dessous. On appelle cette fonction g.
- Pendant les 3 premières secondes la lampe est éteinte ;
- de la 3^{e} à la 5^{e} seconde quelqu'un allume avec un interrupteur variateur et le courant passe progressivement de 0 à 0,5 Ampères ;
- de la 5^{e} seconde à la 10^{e} la lampe est allumée ;
- de la 10^{e} à la 12^{e} seconde il éteint et le courant passe progressivement de 0,5 à 0 A ;
- ensuite l'ampoule reste éteinte.

3. Lorsque la courbe d'une fonction se trace d'un trait continu, c'est à dire « sans lever le crayon », on dit que cette fonction est continue. Répondre aux questions suivantes sans justifier.

a) La fonction f est-elle continue ? ....

b) La fonction g est-elle continue ? ....

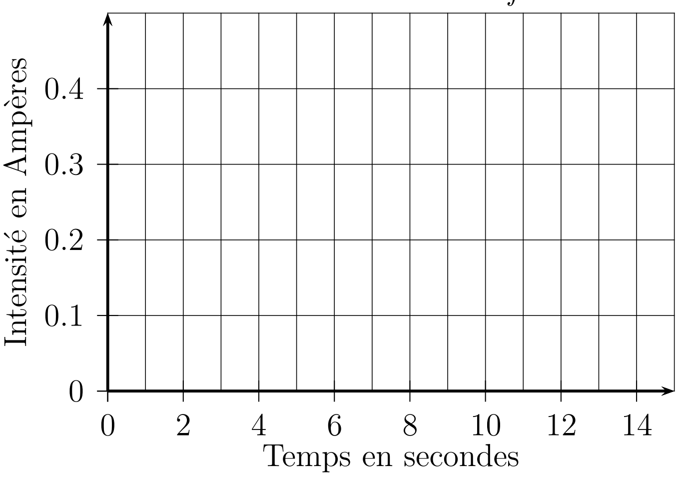
c) La fonction f est-elle continue sur l'intervalle [0 s ; 4 s] ? ....

d) La fonction f est-elle continue sur l'intervalle [7 s ; 12 s] ? ....

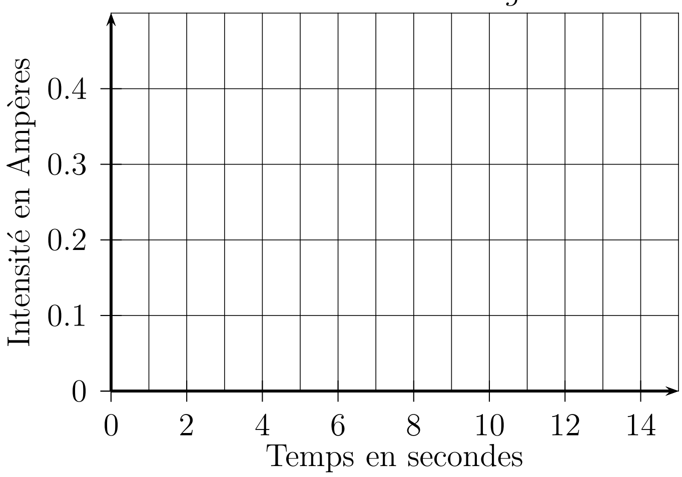
e) La fonction g est-elle continue sur l'intervalle [0 s ; 4 s] ? ....

f) La fonction g est-elle continue sur l'intervalle [7 s ; 12 s] ? ....

1re situation – fonction f



2^{e} situation – fonction g



Exercice 3.27

Objectif : savoir reconnaître graphiquement une fonction continue ou discontinue

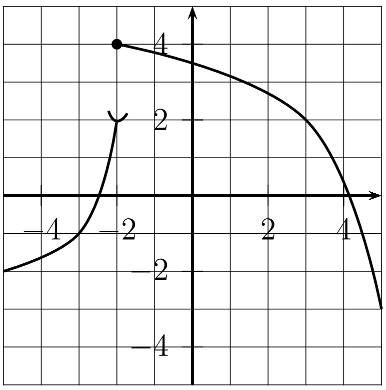
Répondre aux questions suivantes sans justifier.

1. La fonction f est-elle continue sur $[-5 ; 5]$? .... sur $[-1 ; 3]$? ....

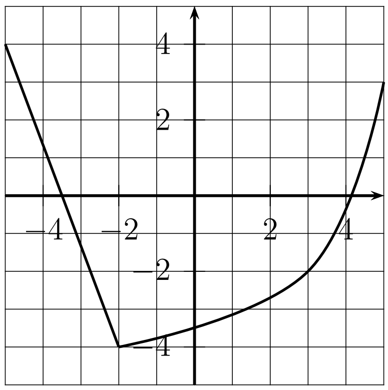
2. La fonction g est-elle continue sur $[-5 ; 5]$? .... sur $[-4 ; -2]$? ....

3. La fonction h est-elle continue sur $[-5 ; 5]$? .... sur $[-3 ; -0]$? ....

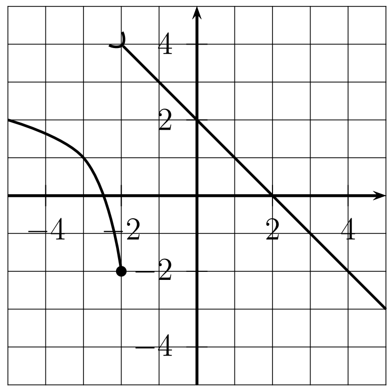
Courbe $\mathscr{C}_f$



Courbe $\mathscr{C}_g$



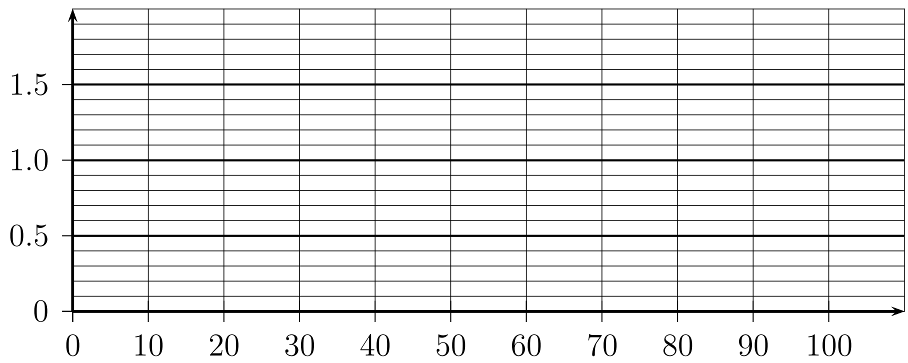
Courbe $\mathscr{C}_h$



Exercice 3.28

1. Dans le repère ci-dessous, tracer la représentation graphique de la fonction f correspondant au tarif postal du tableau ci-dessous.
2. Cette fonction « tarif postal» est-elle continue sur l'intervalle $[0\,;\,100]$?

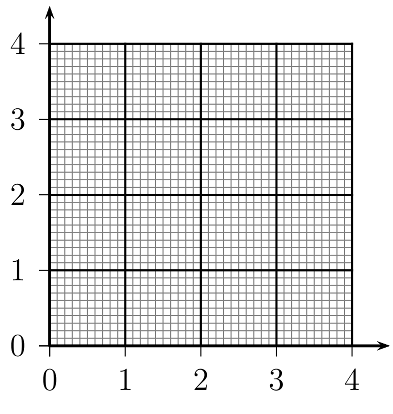
Poids (g)	Tarif (€)
$[0\,;\,20[$	0,60
$[20\,;\,50[$	1,00
$[50\,;\,100]$	1,50



Exercice 3.29 (La fonction partie entière)

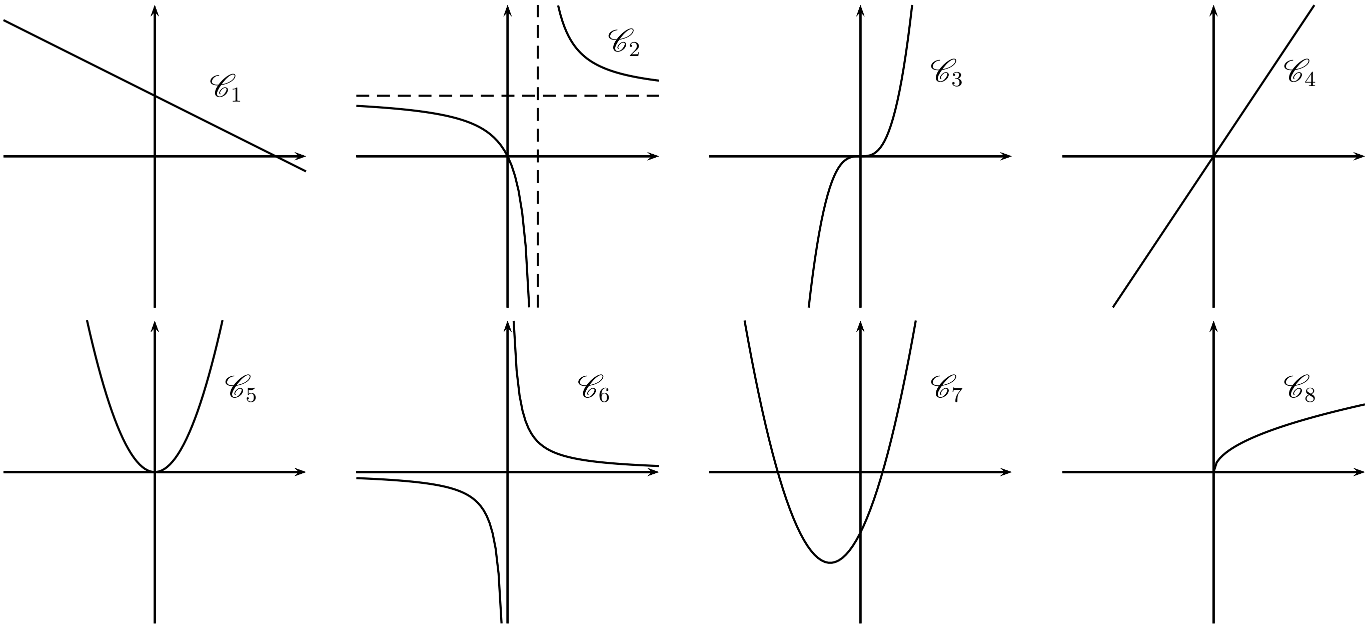
Un nombre entier positif est égal à sa partie entière, par exemple $\mathrm{E}(5) = 5$ et $\mathrm{E}(0) = 0$.
Pour un nombre non entier, voici deux exemples, $\mathrm{E}(2,7) = 2$ et $\mathrm{E}(11,25) = 11$

1. Tracer ci-contre la représentation graphique de la fonction partie entière sur l'intervalle $[0\ ;\ 3[$.
2. La fonction partie entière est-elle continue sur l'intervalle $[0\ ;\ 3[$?



Exercice 3.30 (Fonctions usuelles)

Objectif : revoir rapidement les représentations graphiques des fonctions affines et linéaires, carré, polynômes du second degré, inverse, homographiques, racine carrée, cube, et indiquer si ces fonctions sont continues ou non.



Les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8 sont définies par

$f_1(x) = x^2 + 2x - 2 \qquad f_2(x) = \dfrac{1}{x} \qquad f_3(x) = 1,5x \qquad f_4(x) = \sqrt{x}$

$f_5(x) = x^3 \qquad f_6(x) = \dfrac{2x}{x-1} \qquad f_7(x) = -0,5x + 2 \qquad f_8(x) = x^2$

1. Pour chacune des fonctions, indiquer quelle est sa représentation graphique parmi les courbes ci-dessus.
2. Donner l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions.
3. Chacune des fonctions f_1 à f_8 est-elle continue sur son ensemble de définition ?

3.8 Continuité et équation $f(x) = k$

Exercice 3.31

L'objectif de cet exercice est d'aborder le théorème de la valeur intermédiaire et de le comprendre intuitivement.

Une course cycliste de 40 km commence à l'altitude de 200 m et se termine à l'altitude de 800 m.

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,40]$, x est la distance en km depuis le départ, et $f(x)$ est l'altitude à la distance x. On a donc $f(0) = 200$ et $f(40) = 800$.

Figure 1

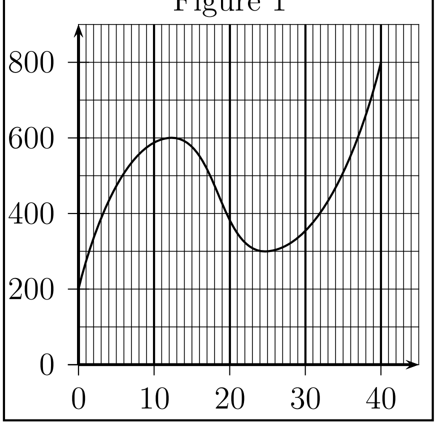
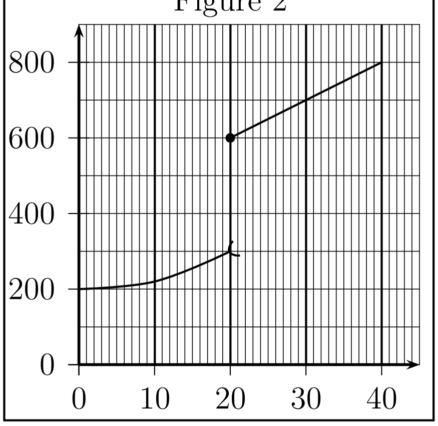


Figure 2



Partie A

1. La figure 1 donne une représentation graphique possible pour la fonction f.
   a) Est ce que le parcours passe par toutes les altitudes intermédiaires entre 200 m et 800 m ?
   b) Est ce que le parcours peut passer plusieurs fois par une altitude intermédiaire entre 200 m et 800 m ? Donner un exemple et tracer des traits sur le graphique.
2. La représentation graphique de la figure 2 est-elle possible ? Pourquoi ? Donner une raison mathématique et une raison intuitive.

Partie B

1. Sur la figure 1 la fonction f est continue sur l'intervalle $[0\ ;\ 40]$. On choisit n'importe quel nombre k entre $f(0)$ et $f(40)$. Peut-on dire que l'équation $f(x) = k$ admet (toujours) au moins une solution ?
2. Sur la figure 2 la fonction f n'est pas continue sur l'intervalle $[0\ ;\ 40]$. On choisit n'importe quel nombre k entre $f(0)$ et $f(40)$. Peut-on dire que l'équation $f(x) = k$ admet (toujours) au moins une solution ?

Exercice 3.32

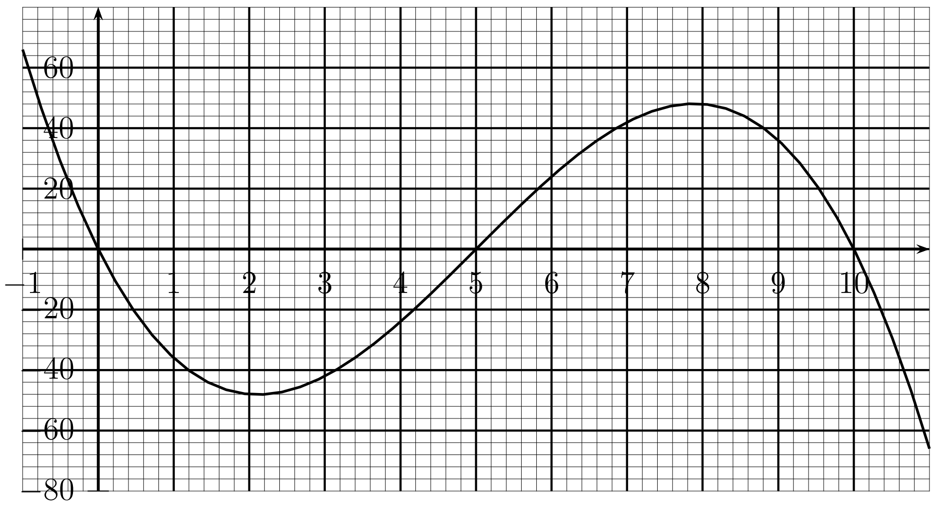
Objectifs :

- *utiliser le théorème de la valeur intermédiaire ;*
- *utiliser la calculatrice pour résoudre approximativement une équation $f(x) = k$.*

La fonction représentée graphiquement ci-dessous est la fonction définie par $f(x) = -x^3 + 15x^2 - 50x$ sur l'intervalle $[-1\ ;\ 11]$.

1. a) La fonction f est-elle continue sur l'intervalle $[-1\ ;\ 11]$? Justifier d'après le cours.
   b) Calculer $f(-1)$ et $f(11)$ (à la calculatrice, sans détailler).
   c) Justifier que l'équation $f(x) = 20$ a au moins une solution sur l'intervalle $[-1\ ;\ 11]$.
2. Peut-on résoudre l'équation $f(x) = 20$ de manière exacte ? Expliquer sa réponse.
3. Déterminer graphiquement des valeurs approchées des solutions avec la précision permise par le graphique. Traçer des traits sur le graphique.
4. En utilisant la calculatrice, déterminer un encadrement de chacune des solutions au millième près. Pour cela, tracer à l'écran la courbe de la fonction f et la droite d'équation $y = 20$. Il faut ensuite déterminer avec précision les coordonnées des points d'intersection.

Sur TI 82	**Sur TI 89**	**Sur CASIO**
Pour chaque intersection, exécuter les étapes a) à d). **a)** Touches $\boxed{\text{2nde}}$ [calculs]. **b)** Choisir `5:intersect`. **c)** `Courbe 1 ?` $\boxed{\text{entrer}}$ `Courbe 2 ?` $\boxed{\text{entrer}}$. **d)** `Valeur Init ?` Saisir un nombre proche d'une solution puis $\boxed{\text{entrer}}$. On voit alors les coordonnées du point d'intersection.	Pour chaque intersection, exécuter les étapes a) à d). **a)** Touche $\boxed{\text{F5}}$ **b)** Choisir `5:intersect`. **c)** `Courbe 1 ?` $\boxed{\text{entrer}}$ `Courbe 2 ?` $\boxed{\text{entrer}}$. **d)** `Borne inf ?` Saisir un nombre inférieur à une solution puis $\boxed{\text{entrer}}$. `Borne sup ?` idem avec nombre supérieur. On voit alors les coordonnées du point d'intersection.	Touches $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{F5}}$ (G-Solv) puis $\boxed{\text{F5}}$ (ISCT) Une croix clignote sur une intersection et on voit les coordonnées du point d'intersection. Pour obtenir l'intersection suivante, appuyer sur $\boxed{\rightarrow}$.



Exercice 3.33

La fonction f est définie par $f(x) = x^3 + x$ sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier que l'équation $f(x) = 100$ a une unique solution α sur l'intervalle $[4\ ;\ 5]$.
2. Exécuter l'algorithme ci-contre pour $d = 0,05$, en complétant le tableau ci-dessous. Ne pas arrondir les résultats, sauf pour $f(m)$ (arrondir au dixième).
3. D'après les résultats du tableau, avec quelle précision peut-on encadrer α : à l'unité ? 10^{-1} ? 10^{-2} ?
4. Programmer cet algorithme à la calculatrice et le tester avec $d = 0,05$.
5. **a)** Exécuter le programme pour $d = 10^{-11}$ et compléter : $a = $ ....

   $b = $ ....

   b) Avec quelle précision peut-on encadrer α ? Écrire cet encadrement.

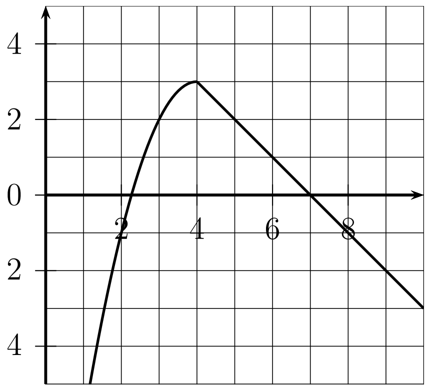
   ....

Algorithme
ENTRÉE
Lire d
TRAITEMENT
a prend la valeur 4
b prend la valeur 5
Tant que $\lvert b - a\rvert > d$
m prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
Si $m^3 + m < 100$
alors a prend la valeur m
sinon b prend la valeur m
Fin du Si
Fin du Tant que
SORTIES
Afficher a et b

	$\lvert b-a\rvert$	m	$f(m) = m^3 + m$	a	b
0					
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					

Exercice 3.34
La fonction f définie ci-dessous est ce qu'on appelle une *fonction définie par morceaux*, elle est représentée ci-contre.

$$f(x) = \begin{cases} 3-(x-4)^2 & \text{si } x < 4 \\ 7-x & \text{si } x \geqslant 4 \end{cases}$$



1. La fonction est-elle continue sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 4[$? Justifier.
2. La fonction est-elle continue sur l'intervalle $]4\ ;\ +\infty[$? Justifier.
3. La fonction est-elle continue en 4 ? Justifier.

Exercice 3.35
La fonction f est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < 0 \\ 5-x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Tracer un repère et tracer la représentation graphique de la fonction f.
2. Étudier la continuité de la fonction f.

Exercice 3.36
Chacune des fonctions f ci-dessous est définie sur $\mathbb{R}$. Étudier dans chaque cas la continuité de f.

1. $f(x) = \begin{cases} x^3-8 & \text{si } x > 2 \\ -1 & \text{si } x \leqslant 2 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-3x+2} & \text{si } x < \dfrac{2}{3} \\ 3x-2 & \text{si } x \geqslant \dfrac{2}{3} \end{cases}$

3.9 Pour réviser

Chapitre du livre n° 4 – Limites de fonctions

Les exercices résolus

- ex 1 p 93 : utiliser la définition de $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)\big) = +\infty$
- ex 2 p 93 : utiliser la définition de $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)\big) = \ell$
- ex 7 p 95 : utiliser la définition de $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\big) = +\infty$
- ex 14 p 97 : limite d'une fonction polynôme en $+\infty$, comment lever l'indétermination.
- ex 15 p 97 : limite de $\dfrac{2x+1}{x-3}$ en $+\infty$ et en 3
- ex 25 p 99 : $f(x) = x^2 - \sin(x)$, étudier une limite par comparaison

Rubrique *Pour s'exercer*, corrigés pages 464

- ex 3 p 93 : utiliser la définition de $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)\big) = +\infty$ et de $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)\big) = +\infty$
- ex 5 p 93 : a) utiliser la définition de $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)\big) = 0$ b) équation d'une asymptote
- ex 8 p 95 : utiliser la définition de $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\big) = +\infty$
- ex 16 p 97 : limite d'une fonction polynôme en $+\infty$, comment lever l'indétermination.
- ex 17 p 97 : limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$, comment lever l'indétermination.

Rubrique *Objectif bac*, corrigés page 472 et 473

- ex 97 p 107 : QCM, lectures graphiques de limites
- ex 99 p 107 : Vrai-Faux, produit et quotient de limites
- ex 102 p 109 : QCM à partir d'un tableau de variations, questions de limites et d'asymptotes
- ex 103 p 109 : étudier la position relative des courbes de 2 fonctions, algorithmique

II Cours

3.1 Limite en $+\infty$ et en $-\infty$

Remarque :

- l'expression « en $+\infty$ » signifie « lorsque x tend vers $+\infty$ » ;
- l'expression « en $-\infty$ » signifie « lorsque x tend vers $-\infty$ ».

3.1.a Limite infinie en $+\infty$ et en $-\infty$

Définitions

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$
signifie que
tout intervalle ouvert $]A\ ;\ +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand.
On écrit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Dire qu'une fonction f a pour limite $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$
signifie que
tout intervalle ouvert $]-\infty\ ;\ A[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand.
On écrit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Remarque :

On définit de manière analogue :

- une fonction f qui a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$;
- une fonction f qui a pour limite $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$.

3.1.b Limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$ et interprétation graphique

Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite ℓ lorsque x tend vers $+\infty$
signifie que
tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand.
On écrit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

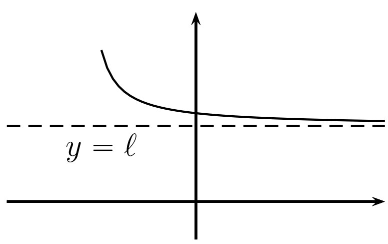
Remarque :

On définit de manière analogue une fonction f qui a pour limite ℓ lorsque x tend vers $-\infty$

Interprétation graphique

Définition – Asymptote horizontale

Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe représentative de f.



3.1.c Limites des fonctions de référence en l'infini

n est un entier naturel non nul.

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ si n est pair $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$

si n est impair $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$

3.2 Limite infinie en un point

Remarque : l'expression « en un point » signifie « lorsque x tend vers un nombre réel a ».

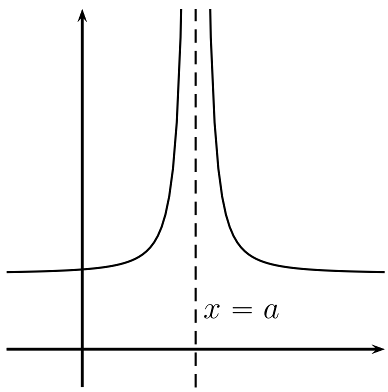
3.2.a Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers un nombre réel a
signifie que
tout intervalle ouvert $]B\ ;\ +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez proche de a.
On écrit : $\lim\limits_{x \to a} (f(x)) = +\infty$

3.2.b Interprétation graphique

Définition – Asymptote verticale

Lorsque $\lim\limits_{x \to +a} f(x) = +\infty$ ou lorsque $\lim\limits_{x \to +a} f(x) = -\infty$,
on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f.



3.2.c Limite à gauche et à droite en un point

Il arrive que la limite d'une fonction f ne soit pas la même selon que x tend vers a en étant supérieur à a ou que x tend vers a en étant inférieur à a.

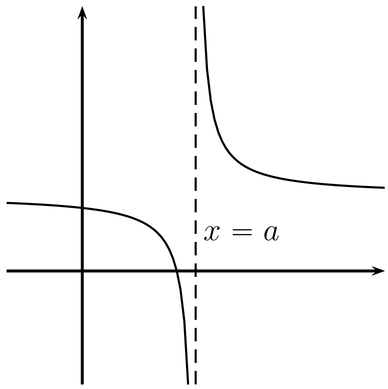
La limite d'une fonction f lorsque x tend vers a en étant supérieur à a s'écrit $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} (f(x))$

La limite d'une fonction f lorsque x tend vers a en étant inférieur à a s'écrit $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} (f(x))$

Exemple

Pour la fonction f représentée graphiquement sur la figure ci-contre, on a :

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)=+\infty$



3.2.d Limites des fonctions de référence en zéro

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \left(\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$ $\quad\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \left(\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)=+\infty$ $\quad\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=+\infty$

Pour tout entier naturel n pair non nul, $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^n}\right)=+\infty$

Pour tout entier naturel n impair non nul, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \left(\dfrac{1}{x^n}\right)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \left(\dfrac{1}{x^n}\right)=+\infty$

3.3 Opérations sur les limites

Les tableaux ci-dessous sont identiques aux tableaux donnés pour les suites au paragraphe 1.10 page 33.

Précisions concernant ces tableaux

- ℓ et ℓ' sont deux nombres réels.
- Ces tableaux concernent aussi bien des situations où x tend vers $+\infty$, vers $-\infty$, ou vers un nombre a.
- Pour obtenir le signe concernant le produit ou le quotient, il faut appliquer la règle des signes.
- FI signifie *forme indéterminée*, c'est à dire qu'on ne peut pas conclure.

Limite d'une somme

$\lim f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(f(x)+g(x))$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Limite d'un produit

$\lim f(x)$	ℓ	$\ell\neq 0$	∞	0
$\lim g(x)$	ℓ'	∞	∞	∞
$\lim(f(x)\times g(x))$	$\ell\times\ell'$	∞	∞	FI

Limite d'un quotient

$\lim f(x)$	ℓ	$\ell\neq 0$	ℓ	0	∞	∞	∞
$\lim g(x)$	$\ell'\neq 0$	0	∞	0	$\ell'\neq 0$	0	∞
$\lim\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	∞	0	FI	∞	∞	FI

3.4 Limite d'une composée de deux fonctions

Propriété

Ci-dessous, a, b, c désignent soit un nombre réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.
$\boxed{\text{Si}}$ $\lim\limits_{x\to a}(u(x)) = b$, et $\boxed{\text{si}}$ $\lim\limits_{X\to b}(f(x)) = c$, $\boxed{\text{alors}}$ $\lim\limits_{x\to a}(f(u(x))) = c$.

Exemples

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+3) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}(\sqrt{X}) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3}) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5+\dfrac{1}{x}\right) = 5$ et $\lim\limits_{X\to5}(\sqrt{X}) = \sqrt{5}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5+\dfrac{1}{x}}\right) = \sqrt{5}$.

3.5 Limites et comparaison

3.5.a Limite infinie et comparaison

Propriété 1

$\boxed{\text{Si}}$ pour tout nombre x dans un intervalle $]A\ ;\ +\infty[$, $f(x) \geqslant g(x)$ et $\boxed{\text{si}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$,
$\boxed{\text{alors}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Propriété 2

$\boxed{\text{Si}}$ pour tout nombre x dans un intervalle $]A\ ;\ +\infty[$, $f(x) \leqslant g(x)$ et $\boxed{\text{si}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$,
$\boxed{\text{alors}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Remarques

- Les deux propriétés restent vraies quand x tend vers $-\infty$, en remplaçant $]A\ ;\ +\infty[$ par $]-\infty\ ;\ A[$.
- Les deux propriétés restent aussi vraies quand x tend vers un nombre a en remplaçant $]A\ ;\ +\infty[$ par un intervalle ouvert qui contient a.

3.5.b Limite finie et comparaison – Théorème des gendarmes

Propriété

$\boxed{\text{Si}}$ pour tout nombre x dans un intervalle $]A\ ;\ +\infty[$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$
et $\boxed{\text{si}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)) = \ell$, et $\lim\limits_{x\to+\infty}(h(x)) = \ell$,
$\boxed{\text{alors}}$ $\lim\limits_{x\to a}(g(x)) = \ell$.

Remarques

- Cette propriété reste vraie quand x tend vers $-\infty$, en remplaçant $]A\ ;\ +\infty[$ par $]-\infty\ ;\ A[$.
- Cette propriété reste aussi vraie quand x tend vers un nombre a en remplaçant $]A\ ;\ +\infty[$ par un intervalle ouvert qui contient a.

3.6 Continuité

3.6.a Définitions

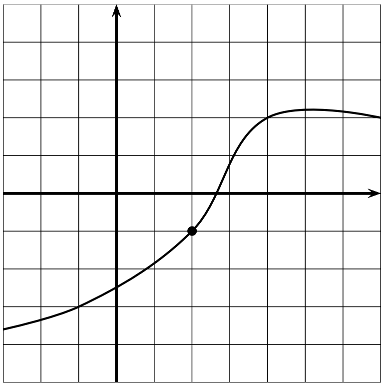
Définition – Continuité en un point

Dire que f est continue en a signifie que

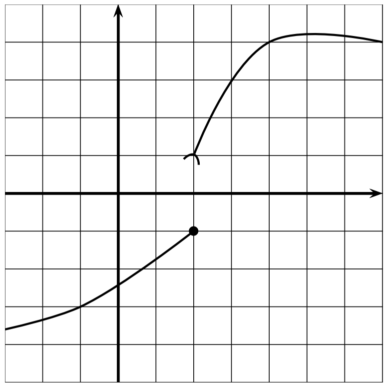
- f est définie en a
- f a une limite en a égale à $f(a)$ autrement dit $\lim\limits_{x \to a}(f(x)) = f(a)$.

Exemples

f est continue en 2 car $\lim\limits_{x \to 2}(f(x)) = f(2) = -1$.



f n'est pas continue en 2 car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<2}}(f(x)) = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>2}}(f(x)) = 1 \neq -1$



Définition – Continuité sur un intervalle

Dire que f est continue sur un intervalle signifie que

- f est définie sur cet intervalle ;
- f est continue en tout nombre réel de cet intervalle.

Remarque

Intuitivement, on dit qu'une fonction est continue sur un intervalle lorsque la courbe de cette fonction se trace d'un trait continu, c'est à dire « sans lever le crayon ».

3.6.b Continuité des fonctions usuelles

Propriété

Les fonctions usuelles sont continues sur leurs ensembles de définition.
Plus précisément :

- les fonctions linéaires et affines sont continues sur $\mathbb{R}$, c'est à dire sur $]-\infty\,; +\infty[$
- les fonctions carré, cube, et toutes les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$
- la fonction racine carrée est continue sur $[0\,; +\infty[$
- la fonction inverse est continue sur $\mathbb{R}^*$ c'est à dire sur $]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$
- les fonctions rationnelles, c'est à dire les fonctions définies par $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ où g et h sont des fonctions polynômes, sont continues sur leur ensemble de définition

3.6.c Fonction dérivable et continuité

Propriété

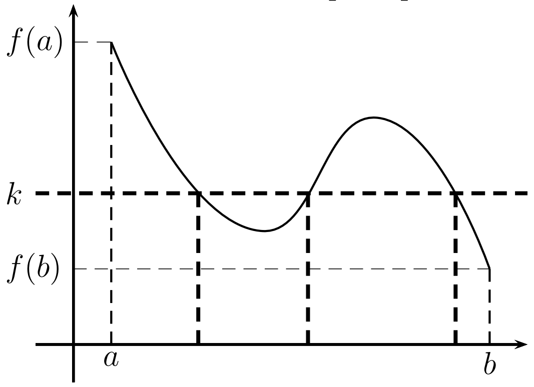
Une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

3.6.d Théorème des valeurs intermédiaires

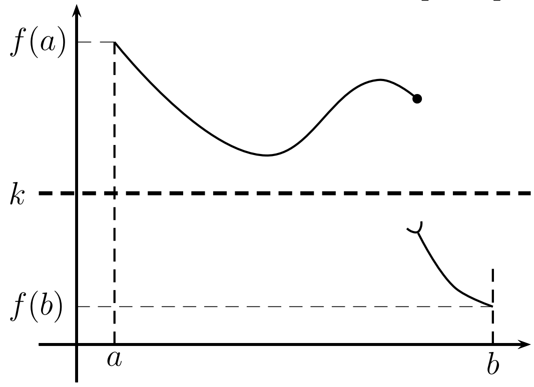
Si	• f est une fonction continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, • k est un nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$,
alors	l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution qui est dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

Exemples

La fonction f représentée ci-dessous est continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, et pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution qui est dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$.



La fonction f représentée ci-dessous n'est pas continue sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$, et il existe des réels k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, tels que l'équation $f(x) = k$ n'admette aucune solution dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$.



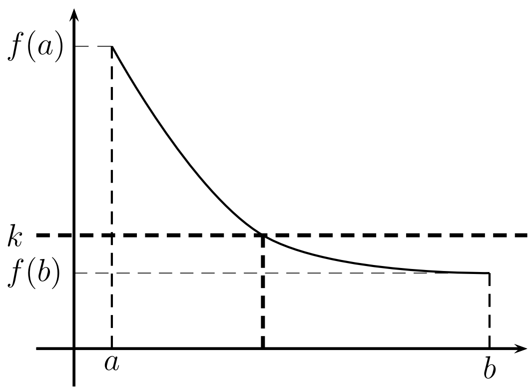
3.6.e Théorème de la valeur intermédiaire pour une fonction strictement monotone

Vocabulaire : dire qu'une fonction est **monotone** sur un intervalle signifie que cette fonction est croissante sur cet intervalle ou décroissante sur cet intervalle.

Propriété 3.1 (Théorème de la valeur intermédiaire)

Si	• f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, • k est un nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$,
alors	l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique qui est dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

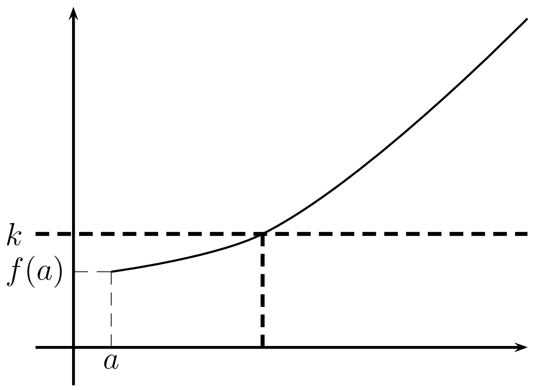
Exemple



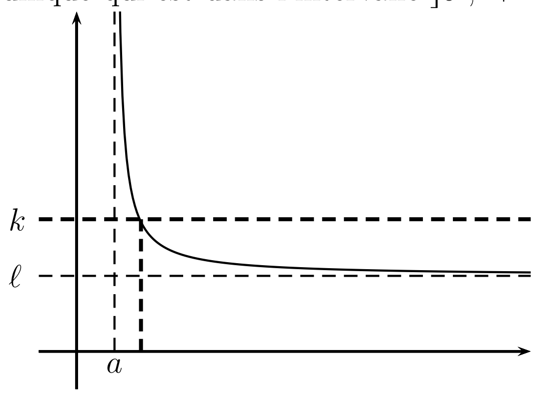
Remarque et exemples

On peut aussi utiliser le théorème de la valeur intermédiaire pour une fonction strictement monotone sur des intervalles ouverts ou semi-ouverts. Voici deux exemples.

Exemple 1
La fonction f est continue et strictement croissante sur $[a\ ;\ +\infty[$
et $\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x)) = +\infty$,
et k est un nombre réel supérieur à $f(a)$ (donc compris entre $f(a)$ et $+\infty$),
donc l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique qui est dans l'intervalle $[a\ ;\ +\infty[$.



Exemple 2
La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]a\ ;\ +\infty[$
et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}}(f(x)) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x)) = \ell$,
et k est un nombre réel supérieur à ℓ (donc compris entre ℓ et $+\infty$),
donc l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique qui est dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.



3.6.f Continuité dans les tableaux de variations

Convention

Dans les tableaux de variation, une flèche oblique indique que sur cet intervalle la fonction est continue est strictement croissante ou continue et strictement décroissante.

Exemple : le tableau de variation ci-dessous indique que
- la fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$
- la fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[1\,;\,4]$

x	0		1		4
$f(x)$	5	↗	8	↘	6

Chapitre 4

Dérivation

I Exercices

Exercice 4.1

Chacune des fonctions définies ci-dessous est dérivable sur l'intervalle I qui est indiqué. Calculer les dérivées de ces fonctions.

1. $f(x) = 9x^5 + \dfrac{2}{x}$ $I =]0\ ;\ +\infty[$
2. $f(x) = (3x^2 - 7x + 4)\sqrt{x}$ $I =]0\ ;\ +\infty[$
3. $f(x) = \dfrac{8}{x^2+1}$ $I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = \dfrac{x^2+3x-4}{x+1}$ $I =]-1\ ;\ +\infty[$

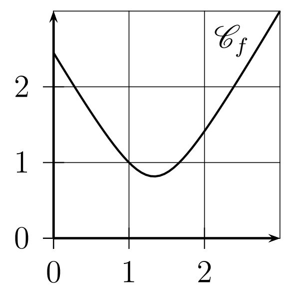
Exercice 4.2

Même exercice que le précédent, pour les fonctions définies ci-dessous et les intervalles correspondants.

1. $f(x) = \sqrt{3x^2 - 4x + 7}$ $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = (6x-1)^4$ $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{(5x-8)^3}$ $I =]2\ ;\ +\infty[$ Indication : $\dfrac{1}{(5x-8)^3} = (5x-8)^{-3}$

Exercice 4.3

La fonction f est définie par $f(x) = \sqrt{3x^2 - 8x + 6}$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
Cette fonction est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, de dérivée f'.
La fonction f est représentée ci-contre sur l'intervalle $[0\ ;\ 3]$, par la courbe $\mathscr{C}_f$.



1. **a)** Calculer la valeur exacte de $f(0)$.
   b) Déterminer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.
2. Pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, calculer $f'(x)$.
3. **a)** Sur la courbe $\mathscr{C}_f$, placer le point A d'abscisse 1.

b) Calculer le coefficient directeur de la droite (d) tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A.

c) Tracer la tangente (d).

d) Calculer l'équation réduite de la tangente (d).

4. Étudier le signe de la dérivée.

5. Dresser un tableau comprenant le signe de la dérivée, les variations de f, et les valeurs remarquables, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

6. La fonction f atteint un minimum sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

a) En quelle valeur de x est atteint ce minimum ? Justifier et donner sa valeur exacte.

b) Calculer ce minimum. Donner la valeur exacte.

Exercice 4.4

La fonction f est définie par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Cette fonction est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, de dérivée f'.

1. Déterminer les limites de f lorsque x tend vers 0 en étant positif, et lorsque x tend vers $+\infty$.

2. Pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, calculer $f'(x)$.

3. Étudier le signe de la dérivée.

4. Dresser un tableau comprenant le signe de la dérivée, les variations de f, et les valeurs remarquables.

5. Vérifier en traçant la courbe à la calculatrice.

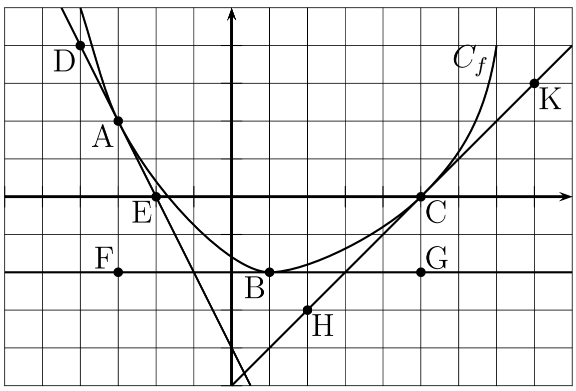
Exercice 4.5

La fonction f représentée ci-dessous par la courbe $\mathscr{C}_f$ est définie et dérivable sur $[-4\ ;\ 7]$. L'unité du repère est un carreau.

Les points A, B, C sont des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites (DE), (FG), (HK) sont les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ respectivement en A, en B, en C.

1. Par lecture graphique, déterminer $f(-3)$, $f(1)$, $f(5)$, $f'(-3)$, $f'(1)$, $f'(5)$.

2. Déterminer les équations réduites des tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A, en B, en C, nommées respectivement (T_A), (T_B), (T_C).



Exercice 4.6

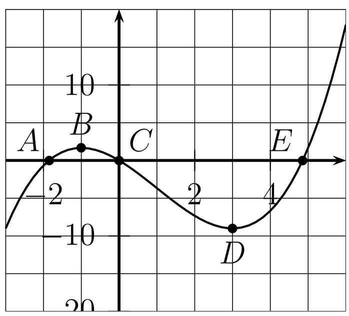
Une fonction f est représentée ci-contre. Parmi les trois courbes ci-dessous, laquelle représente la dérivée de f ?

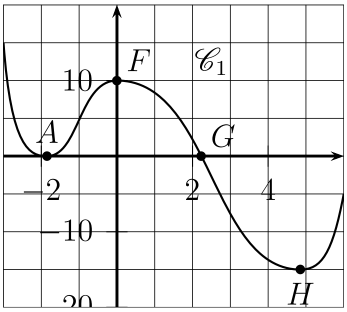
on donne les coordonnées suivantes :

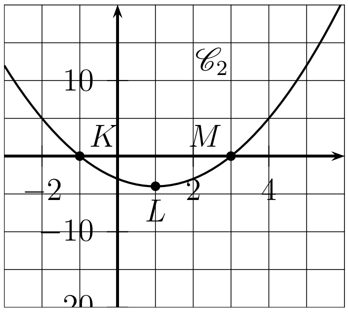
$A(-1,9\ ;\ 0)$ $B(-1\ ;\ 1,7)$ $C(0\ ;\ 0)$ $D(3\ ;\ -9)$

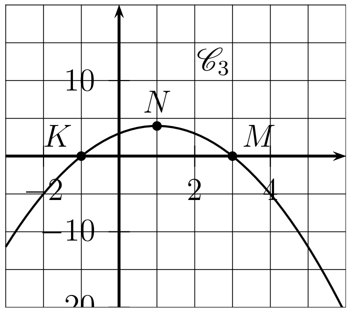
$E(4,9\ ;\ 0)$ $F(0\ ;\ 10)$ $G(2,2\ ;\ 0)$ $H(4,9\ ;\ -15)$

$K(-1\ ;\ 0)$ $L(1\ ;\ -4)$ $M(3\ ;\ 0)$ $N(1\ ;\ 4)$









Exercice 4.7

La fonction f est définie sur $]1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$, et sa représentation graphique est nommée $\mathscr{C}_f$.

1. Justifier par un calcul que pour tout nombre réel x de l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$, $f(x) = x-2+\dfrac{1}{x-1}$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x))$.
3. **a)** Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)$
   b) En déduire une asymptote à la courbe. Donner son équation.
4. **a)** Étudier le signe de $f(x)-(x-2)$.
   b) En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite d'équation : $y = x-2$.
5. **a)** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x-2))$.
   b) Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite d'équation : $y = x-2$?
6. **a)** Calculer la dérivée de f.
   b) Étudier le signe de la dérivée.
7. Dresser un tableau comprenant le signe de la dérivée, les variations de la fonction, les valeurs remarquables et les limites.
8. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ à la calculatrice.

Exercice 4.8

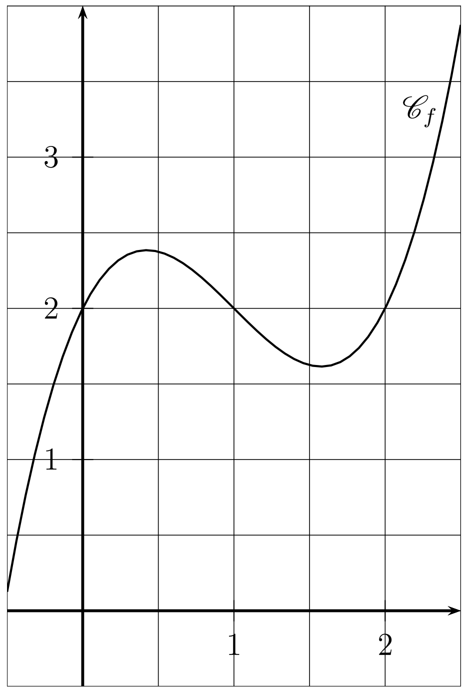
Le but de cet exercice est d'étudier les variations de la fonction définie par
$f(x) = 0,5x^4 - x^3 - 18x^2 + 50x$ *sur l'intervalle* $[-2\ ;\ 3]$.

1. La fonction g est définie par $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 50$ sur l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$.
   a) Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$.
   b) Étudier le signe de $g'(x)$ selon les valeurs de x sur l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$.
   c) Dresser un tableau comprenant le signe de $g'(x)$, les variations de la fonction g, les valeurs remarquables.
   d) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution α sur l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$.
   e) Donner l'arrondi au centième de α.
   f) Dresser un tableau de signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.
2. La fonction f est définie par $f(x) = 0,5x^4 - x^3 - 18x^2 + 50x$ sur l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$.
   a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$.
   b) Dresser un tableau comprenant le signe de $f'(x)$ et les variations de f. Indiquer aussi les valeurs remarquables, qui seront arrondies au centième près si nécessaire.

Exercice 4.9

Exercice 4.10

La fonction f est définie par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ sur l'intervalle $[-0,5\ ;\ 2,5]$, et elle est représentée ci-contre par la courbe $\mathscr{C}_f$.



1. Placer le point A d'abscisse 1 sur la courbe $\mathscr{C}_f$.
2. On appelle (d) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.
   a) Justifier que l'équation réduite de la droite (d) est : $y = -x + 3$.
   b) Tracer la droite (d).
3. On pose : $h(x) = f(x) - (-x + 3)$
   a) Justifier par des calculs que $h(x) = (x - 1)^3$.
   b) Étudier le signe de $h(x)$ selon les valeurs de x de l'intervalle $[-0,5\ ;\ 2,5]$
   c) En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la tangente (d) selon les valeurs de x de l'intervalle $[-0,5\ ;\ 2,5]$.

Méthode : étudier la position d'une courbe par rapport à une droite

Pour étudier la position d'une courbe d'une fonction f par rapport à une droite (d) d'équation $y = mx + p$,

- calculer et factoriser l'expression $f(x) - (mx + p)$;
- étudier le signe de $f(x) - (mx + p)$;
- en déduire la position de la courbe de f par rapport à la droite (d).

Exercice 4.11

La fonction f est définie par $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$ sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les limites de $f(x)$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.
2. Calculer la dérivée.
3. Déterminer a et b tels que pour tout réel x, $f'(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.
4. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x. Détailler les calculs et justifier.
5. Dresser le tableau de variations (complet) de la fonction f .

Exercice 4.12

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation $f(x) = 0$ où f est la fonction de l'exercice précédent.

À l'aide du théorème de la valeur intermédiaire, on pourrait justifier le nombre de solutions de cette équation, mais nous allons faire mieux, en résolvant cette équation de manière exacte.

Comme dans l'exercice précédent, la fonction f est définie par $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$ sur $\mathbb{R}$.

1. L'équation $f(x) = 0$ a deux solutions entières simples, α, β, dont une est évidente. Lesquelles ? On pourra utiliser la calculatrice, puis justifier par des calculs.
2. Déterminer b et c tels que pour tout réel x, $f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x^2 + bx + c)$.
3. Calculer toutes les solutions exactes de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 4.13

La fonction f est définie par $f(x) = \dfrac{5x - 14}{x - 3}$ sur $]-\infty\ ;\ 3[\cup]3\ ;\ +\infty[$.

On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. **a)** Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}}(f(x))$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}}(f(x))$.

b) En déduire une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$. Donner une équation de cette asymptote.

2. **a)** Justifier que pour tout réel x différent de 3, $f(x) = 5 + \dfrac{1}{x - 3}$.

b) En déduire les limites de $f(x)$ lorsque tend vers $-\infty$ et $+\infty$.

c) En déduire une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$. Donner une équation de cette asymptote.

3. La fonction f est dérivable sur $]-\infty\ ;\ 3[\cup]3\ ;\ +\infty[$, de dérivée f'.

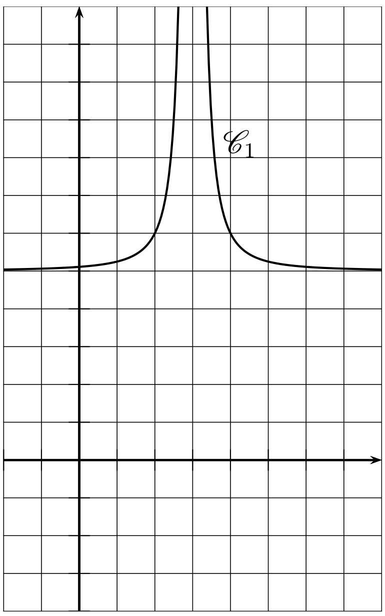
a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x différent de 3.

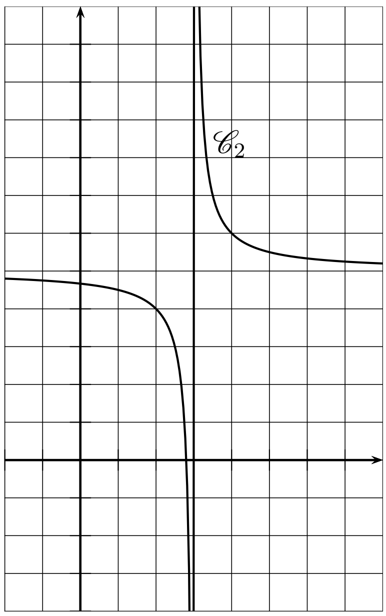
b) Justifier le signe de la dérivée.

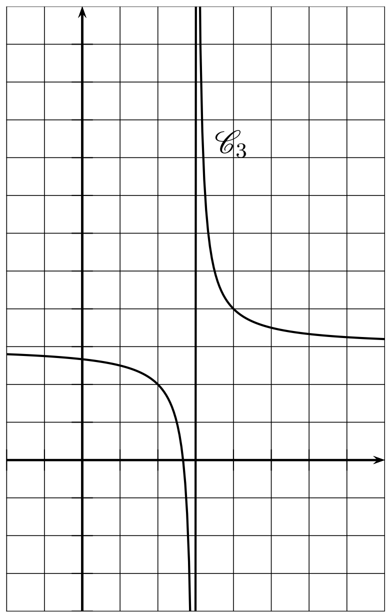
4. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur $]-\infty\ ;\ 3[\cup]3\ ;\ +\infty[$ (signe de la dérivée, variations et valeurs remarquables).

5. **a)** La courbe $\mathscr{C}_f$ est une des courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$. Laquelle ?

b) Sur la figure choisie, tracer les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_f$.





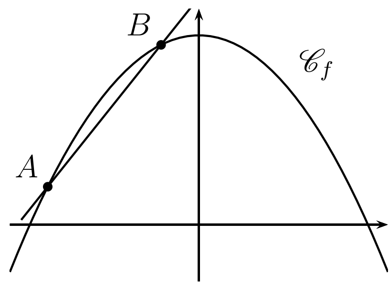


II Cours

4.1 Taux de variation (1re S)

Pour une fonction f représentée par une courbe $\mathscr{C}_f$, et pour deux points A et B de cette courbe,

- la droite (AB) s'appelle une **corde** de la courbe $\mathscr{C}_f$;
- le coefficient directeur de cette corde (AB) est égal à $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ c'est à dire $\dfrac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}$;
- $\dfrac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}$ est appelé **taux de variation de f entre x_A et x_B**.



4.2 Nombre dérivé d'une fonction (1re S)

Définition

Une fonction f est définie sur un intervalle I, et a et h sont deux nombres réels tels que a et $a+h$ soient dans l'intervalle I.
Dire que la fonction f a un nombre dérivé en a signifie que $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tend vers un nombre réel quand h tend vers 0.
Ce nombre est appelé le **nombre dérivé de la fonction f en a**.

Exemple

La fonction f est définie par $f(x) = 5 - x^2$.

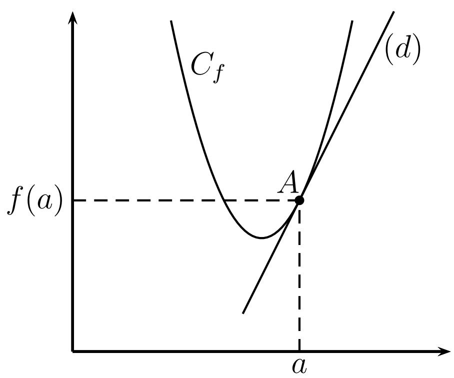
$a = 1$ $\quad h = 0,5$ $\quad \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{f(1,5) - f(1)}{0,5} = -2,5$

$a = 1$ $\quad h = 0,1$ $\quad \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{f(1,1) - f(1)}{0,1} = -2,1$

$a = 1$ $\quad h = 0,001$ $\quad \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{f(1,001) - f(1)}{0,001} = -2,001$

En voyant ces résultats successifs, on admet que $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$ tend vers -2 quand h tend vers 0, par conséquent $\boxed{\text{le nombre dérivé de } f \text{ en 1 est égal à } -2}$.

4.3 Tangente à la courbe (1re S) .



Pour une fonction f dérivable en a,
le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point de cette courbe d'abscisse a.

Pour une fonction f dérivable en a, l'équation réduite de la tangente à la courbe au point d'abscisse a est :

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

4.4 Fonction dérivée (1re S).

Définition

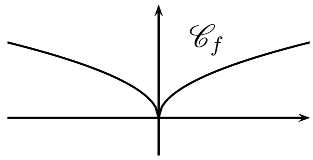
Dire qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle signifie que f est définie sur cet intervalle et que pour tout nombre a de cet intervalle f admet un nombre dérivé en a.

Définition

Pour une fonction f dérivable sur un intervalle la fonction qui à tout nombre a de cet intervalle associe le nombre dérivé en a s'appelle la fonction dérivée de f, et on la note f'.

Remarque et exemple

Une courbe représente une fonction dérivable en a si on peut tracer une tangente au point de cette courbe d'abscisse a.
Par exemple, la fonction f représentée à droite n'est pas dérivable en 0.



4.5 Calcul de dérivée

Tableau 1 – Dérivées des fonctions usuelles (1re S)

$f(x) = \cdots$	$f'(x) = \cdots$	f dérivable sur $\cdots$
k constante	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 0$, $\mathbb{R}^*$ si $n \leqslant -1$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\ ;\ +\infty[$

Tableau 2 – Dérivée d'une somme, d'un produit et d'un quotient (1re S).

Dans le tableau ci-dessous, u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et k est une constante.

Dérivée	Condition
$(u+v)' = u' + v'$	
$(ku)' = k \times u'$	
$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$	v ne s'annule pas sur I
$(uv)' = u'v + v'u$	
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$	v ne s'annule pas sur I

Compléments de terminale

- u est une fonction dérivable sur un intervalle I, et n est un nombre entier relatif non nul.
  alors : $\boxed{\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}}$ (u ne s'annule pas sur I) et : $\boxed{\left(u^n\right)' = nu'u^{n-1}}$
- f est une fonction dérivable
  si g est définie sous la forme : $\boxed{g(x) = f(ax+b)}$ alors : $\boxed{g'(x) = a \times f'(ax+b)}$

Remarque

Les trois formules de dérivées précédentes viennent en fait d'une seule formule de dérivée, indiquée ci-dessous, mais le programme n'exige pas qu'un élève de terminale S connaisse cette formule.

$\boxed{\left(f(u)\right)' = u' \times f'(u)}$

4.6 Variations de fonctions sans la dérivée (1re S)

On peut utiliser la dérivée d'une fonction dérivable pour étudier ses variations, comme cela est rappelé au paragraphe suivant. Cependant, il est possible d'étudier le sens de variation de certaines fonctions sans utiliser la dérivée.

Fonctions dont on sait étudier les variations sans utiliser la dérivée

- fonctions carré, inverse, valeur absolue, racine,
- fonctions affines et polynômes du second degré,
- fonctions de la forme $u+k$, λu, $\sqrt{u}$, $\dfrac{1}{u}$, où u est une fonction carré, inverse, valeur absolue, racine, ou affine.

4.7 Sens de variation et signe de la dérivée, extrémum (1re S)

Propriété – Sens de variation et signe de la dérivée

- Une fonction f dérivable sur un intervalle est croissante sur cet intervalle *si et seulement si* sa dérivée f' est positive cet intervalle.
- Une fonction f dérivable sur un intervalle est décroissante sur cet intervalle *si et seulement si* sa dérivée f' est négative cet intervalle.
- Une fonction f dérivable sur un intervalle est constante sur cet intervalle *si et seulement si* sa dérivée f' est nulle sur cet intervalle.

Définitions – Extrémum local

- $f(a)$ est un maximum local de f signifie qu'il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $f(a)$ soit le maximum de f sur I.
- $f(a)$ est un minimum local de f signifie qu'il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $f(a)$ soit le minimum de f sur I.
- $f(a)$ est un extremum local de f signifie que $f(a)$ est un maximum ou un minimum local de f

Propriété – Dérivée et extrémum local

f est une fonction dérivable sur un intervalle I et a est un nombre de cet intervalle.
Si $f(a)$ est un extrémum local de f, alors $f'(a) = 0$.

f est une fonction dérivable sur un intervalle I et a est un nombre de cet intervalle.
Si f' s'annule en a en changeant de signe, alors $f(a)$ est un extrémum local de f.

Chapitre 5

Nombres complexes

Et un jour on inventa les nombres complexes.

Les plus anciens nombres qui ont été inventés, il y a plusieurs milliers d'années, sont bien sûr les nombres entiers positifs 1, 2, 3, etc. Il fallait compter des personnes, des animaux, des objets, etc.

Le zéro est apparu plus tard, en Mésopotamie au II^e siècle avant Jésus Christ, puis en Inde au V^e siècle.

Les nombres entiers positifs étant insuffisants pour mesurer par exemple une longueur ou l'aire d'un terrain, parce qu'il faut partager l'unité en plusieurs parties, on a inventé les fractions entre -3000 et 0.

Les grecs anciens étaient persuadés que tous les nombres étaient des fractions, mais au V^e/VI^e siècle av. JC un disciple de Pythagore découvre l'existence de $\sqrt{2}$, et démontre qu'on ne peut pas trouver de fraction telle que $(\frac{p}{q})^2 = 2$. Il paraît même que cela aurait causé le meurtre ou le suicide de ce disciple.

Au VI^e siècle, pour des besoins comptables, les mathématiciens indiens utilisent des nombres négatifs, mais les négatifs n'apparaîtront en Europe qu'au XV^e siècle.

L'écriture décimale des nombres avec les chiffres de 0 à 9 a été inventée par les Indiens au IV^e/V^e siècle, puis reprise par les mathématiciens arabes, d'où le nom de « chiffres arabes ». Au XV^e siècle, Al Kashi invente les nombres à virgules comme on les connaît actuellement, et ce n'est qu'au XVI^e /XVII^e siècle que ces nombres sont adoptés en Europe, grâce à un mathématicien flamand, Simon Stevin.

Au XVI^e siècle les mathématiciens italiens Cardan et Bombelli, qui veulent résoudre des équations du 3^e degré, inventent un nombre i tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.[1] Cela donne naissance à un ensemble de nombres qui inclut les nombres réels nommé *ensemble des nombres complexes*.

En 1797 le mathématicien allemand Gauss découvre la forme géométrique des nombres complexes, ce sujet sera abordé dans ce chapitre et au chapitre 10.

En 1843, le mathématicien irlandais Hamilton invente l'ensemble des *quaternions*, qui inclut les réels et les complexes, mais ça, c'est une autre histoire ...

1. Pour en savoir plus, voir par exemple l'activité 1 page 235.

I Exercices

5.1 Calculs avec les complexes, forme algébrique

Exercice 5.1

Un nombre complexe s'écrit sous la forme $z = x + y\mathrm{i}$, où x et y sont des nombres réels et le nombre i est tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.

Écrire toutes les expressions ci-dessous sous la forme $x + y\mathrm{i}$.

1. $(3 - 5\mathrm{i}) + (6 + 2\mathrm{i})$ **2.** $(-8 + \mathrm{i}) - (7 + 4\mathrm{i})$ **3.** $(9 - 6\mathrm{i}) \times (2 - 3\mathrm{i})$
4. $(1 - 4\mathrm{i}) \times (3 + 9\mathrm{i})$ **5.** $(5 - \mathrm{i}) \times (5 + \mathrm{i})$ **6.** $(8 + 3\mathrm{i})^2$

Exercice 5.2

Écrire toutes les expressions ci-dessous sous la forme $x + y\mathrm{i}$.

1. $\dfrac{1}{3 + 2\mathrm{i}}$ Indication : multiplier au numérateur et au dénominateur par $3 - 2\mathrm{i}$.
2. $\dfrac{1}{6 - \mathrm{i}}$ (multiplier au numérateur et au dénominateur par $6 + \mathrm{i}$).
3. $\dfrac{1 + \mathrm{i}}{4 - 5\mathrm{i}}$ (multiplier au numérateur et au dénominateur par $4 + 5\mathrm{i}$).
4. $\dfrac{-7 + 2\mathrm{i}}{3 + \mathrm{i}}$ (multiplier au numérateur et au dénominateur par $3 - \mathrm{i}$).

Exercice 5.3

On pose : $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ Calculer $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2$ sous forme algébrique.

Exercice 5.4

1. Calculer la partie réelle de : $\mathrm{i}(3 - 7\mathrm{i})$.
2. Calculer la partie imaginaire de : $\dfrac{1}{6 - 5\mathrm{i}}$.

Exercice 5.5

Écrire toutes les expressions ci-dessous sous la forme $x + y\mathrm{i}$.

1. $(a + b\mathrm{i}) + (a' + b'\mathrm{i})$ **2.** $(a + b\mathrm{i}) \times (a' + b'\mathrm{i})$ **3.** $(a + b\mathrm{i}) \times (a - b\mathrm{i})$ **4.** $\dfrac{1}{a + b\mathrm{i}}$

Exercice 5.6

Le nombre complexe z est égal à $x + y\mathrm{i}$. Écrire sous forme algébrique les expressions ci-dessous.

1. $3\mathrm{i}z$ **2.** $z^2 - z$ **3.** $\dfrac{2}{z}$ **4.** $\dfrac{1}{z + 1}$

Exercice 5.7

Le nombre complexe z est égal à $x + y\mathrm{i}$.

1. Calculer la partie imaginaire de $2\mathrm{i}(z + 1)$ en fonction de x et y.
2. Calculer la partie réelle de $(1 + \mathrm{i})(z - 3\mathrm{i})$ en fonction de x et y.

Exercice 5.8

Résoudre les équations ci-dessous. Donner chaque solution sous forme algébrique.

1. $2z - 3\mathrm{i} = -4 + 5\mathrm{i}$ **2.** $\mathrm{i}z + 8 = -\mathrm{i}$ **3.** $3 + z = 2\mathrm{i}z + 5 - \mathrm{i}$ **4.** $\dfrac{z-3}{z+\mathrm{i}} = \mathrm{i}$

Exercice 5.9

Résoudre les systèmes ci-dessous.

1. $\begin{cases} 3z_1 + z_2 = 2 - 5\mathrm{i} \\ z_1 - z_2 = -2 + \mathrm{i} \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 2z_1 - z_2 = -2 - 3\mathrm{i} \\ z_1 + 3z_2 = 13 + 2\mathrm{i} \end{cases}$

5.2 Équation du second degré

Exercice 5.10

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous.

1. $(z - \mathrm{i})(2z - 6 + 4\mathrm{i}) = 0$ **2.** $\mathrm{i}z^2 + (2 - \mathrm{i})z = 0$ **3.** $4z^2 - (1 + \mathrm{i})^2 = 0$

Exercice 5.11

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous.

1. $z^2 = 16$ **2.** $z^2 = 7$ **3.** $z^2 = 0$ **4.** $z^2 = -9$ **5.** $z^2 = -5$
6. $(z - 2)^2 = -5$ **7.** $z^2 + 1 = 0$ **8.** $(2z + 6)^2 + 16 = 0$

Exercice 5.12

On appelle $f(z)$ l'expression : $f(z) = (z - 1 + 2\mathrm{i})(z - 1 - 2\mathrm{i})$.

1. Développer $f(z)$ sous la forme $az^2 + bz + c$.
2. Résoudre l'équation $f(z) = 0$.
3. À partir de l'expression développée, retrouver les solutions à l'aide du discriminant.

Exercice 5.13

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous.

1. $z^2 - 10z + 34 = 0$ **2.** $9z^2 - 12z + 4 = 0$ **3.** $z^2 - 4z + 1 = 0$ **4.** $z^2 - 14z + 54 = 0$

Exercice 5.14

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 - z^2 - 20 = 0$ *(ce type d'équation s'appelle une équation bicarrée)*

Indication : poser $Z = z^2$, puis résoudre une équation d'inconnue Z, puis revenir à l'équation de départ.

Exercice 5.15

Pour tout nombre complexe z, on pose : $P(z) = z^3 - 11z^2 + 39z - 29$.

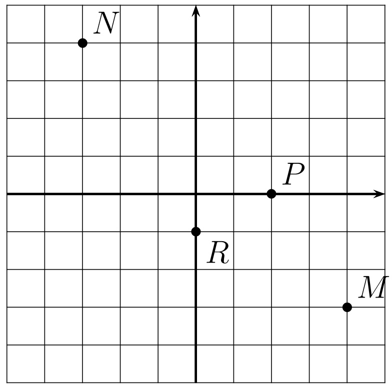
1. Calculer $P(1)$.
2. Déterminer les réels a et b tels que pour tout nombre complexe z, on ait : $P(z) = (z - 1)(z^2 + az + b)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.

5.3 Représentation géométrique

Dès le 18e siècle des mathématiciens comme Euler ont l'idée d'associer un point ou un vecteur à un nombre complexe, mais c'est Gauss en 1811 qui formule l'idée de représenter un nombre complexe $z = x + y\text{i}$ dans un repère orthonormé du plan par le point M de coordonnées $M(x\ ;\ y)$.

Exercice 5.16

1. Dans le repère orthonormé ci-contre, placer les points A, B, C, D, associés aux complexes respectifs :
$z_A = 4 + 2\text{i}$; $z_B = -3 - 4\text{i}$; $z_C = 3\text{i}$; $z_D = -1$.
2. Donner les nombre complexes z_M, z_N, z_P, z_R associés respectivement aux points M, N,P, R placés dans le repère ci-contre.



Vocabulaire : le nombre complexe $z = x + y\text{i}$ associé à chaque point $M(x\ ;\ y)$ est nommé **l'affixe de** M.

Exercice 5.17

Tracer un repère orthonormé et tracer chacun des ensembles de points ci-dessous.

1. L'ensemble des points dont l'affixe est un réel.
2. L'ensemble des points dont l'affixe est un imaginaire pur.
3. L'ensemble des points dont l'affixe a une partie réelle égale à -3.
4. L'ensemble des points dont l'affixe a une partie imaginaire égale à 5.
5. L'ensemble des points dont l'affixe a même partie réelle et imaginaire.

Exercice 5.18

z est un nombre complexe et $z = x + y\text{i}$. Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $Z = z^2 + 6z - 2$ soit un réel.

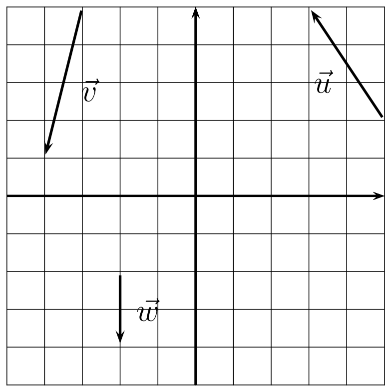
Indications :

- remplacer z par $x + y\text{i}$ dans l'expression $Z = z^2 + 6z - 2$
- puis écrire l'expression obtenue sous forme algébrique, la partie réelle en fonction de x et de y, et la partie imaginaire en fonction de x et de y.

Exercice 5.19

On a vu que l'on peut associer un nombre complexe et un point, de même on peut associer un nombre complexe et un vecteur. Par exemple l'affixe du vecteur $\vec{u}$ ci-contre est $-2 + 3\text{i}$.

1. Donner les affixes des vecteurs $\vec{v}$, $\vec{w}$.
2. Dans le repère orthonormé ci-contre, tracer les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ $\vec{c}$ d'affixes respectifs : $z_{\vec{a}} = 3 + \text{i}$ $\quad z_{\vec{b}} = -3$ $\quad z_{\vec{c}} = 1 - 3\text{i}$



Exercice 5.20

1. Tracer un repère orthonormé et placer les points A et B d'affixes respectifs :
$z_A = 2 + \text{i}$ et $z_B = 7 + 4\text{i}$.

2. Quel est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$?

3. Comment peut-on le calculer à partir des complexes z_A et z_B ?

Exercice 5.21

1. Tracer un repère orthonormé et placer les points A, B, C, D, E d'affixes respectifs :
$z_A = -4 - \text{i}$ $\quad z_B = -3 + 2\text{i}$ $\quad z_C = 4 + 4\text{i}$ $\quad z_D = 3 + \text{i}$ $\quad z_E = -1 + 8\text{i}$

2. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier par des calculs sur les affixes.

3. **a)** Justifier que $z_E - z_A = 3(z_B - z_A)$

b) Que peut-on en conclure pour les points A, B, E ? Justifier.

Exercice 5.22

1. Tracer un repère orthonormé et placer les points A et B d'affixes respectifs :
$z_A = -3 + 2\text{i}$ et $z_B = 7 - 8\text{i}$.

2. Quel est l'affixe z_K du point K milieu de $[AB]$.

3. Comment peut-on calculer l'affixe z_K à partir des complexes z_A et z_B ?

Exercice 5.23

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$.

À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = z^2 - 4z$.

On dit que le point M' est l'image du point M.

1. Tracer les axes du repère $(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$, et compléter la figure au fur et à mesure.

2. **a)** Placer le point A d'affixe $z_A = 1 - 2\text{i}$.

b) L'image de A est A'. Calculer $z_{A'}$ l'affixe de A'.

c) Placer le point A' sur la figure.

3. On dit qu'un point M est *invariant* si et seulement si $z' = z$, c'est à dire si et seulement si $z^2 - 4z = z$.

a) Le point A est-il invariant ?

b) Déterminer les points invariants.

c) Les placer sur la figure.

4. Déterminer les points qui ont pour image le point B d'affixe -5.

5. K est le point d'affixe -3.

a) Tracer le quadrilatère $OAKA'$.

b) Le quadrilatère $OAKA'$ est-il un parallélogramme ? Ne pas justifier.

c) Déterminer les points M du plan tels $OMKM'$ est un parallélogramme.

d) Placer ces points et tracer ces parallélogrammes.

6. **a)** Le point A' est-il sur l'axe des réels ?

b) Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe $z = x + iy$ où x et y sont réels, tels que le point M' associé soit sur l'axe des réels.
Indication : calculer d'abord z' sous forme algébrique en fonction de x et de y.

c) Tracer l'ensemble $\mathscr{E}$ sur la figure.

5.4 Conjugué d'un nombre complexe

Le **nombre conjugué** d'un nombre complexe $z = x + y\mathrm{i}$ est $\boxed{\overline{z} = x - y\mathrm{i}}$.

Dans tout ce qui a été fait précédemment, la notion de conjugué d'un nombre complexe a déjà été utilisée, dans les calculs et pour l'équation du second degré.

Cette dernière partie a pour but d'étudier la notion de conjugué d'un nombre complexe pour elle même.

Exercice 5.24

On donne les nombres complexes z, z_1, z_2 : $z = x + y\mathrm{i}$ $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}$ $z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$

1. Vérifier si $\overline{z_1 + z_2}$ est égal à $\overline{z_1} + \overline{z_2}$.
2. Vérifier si $\overline{z_1 \times z_2}$ est égal à $\overline{z_1} \times \overline{z_2}$.
3. Vérifier si $\overline{\dfrac{1}{z}}$ est égal à $\dfrac{1}{\overline{z}}$.

Exercice 5.25

Les nombres $\dfrac{5-2\mathrm{i}}{4+3\mathrm{i}}$ et $\dfrac{5+2\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}}$ sont-ils conjugués ? Justifier.

Exercice 5.26

Pour chacun des complexes z ci-dessous, calculer $\overline{z}$ sous forme algébrique.

1. $z = (3-2\mathrm{i})(4-\mathrm{i})$. **2.** $z = \dfrac{1}{3+\mathrm{i}}$. **3.** $z = \dfrac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$.

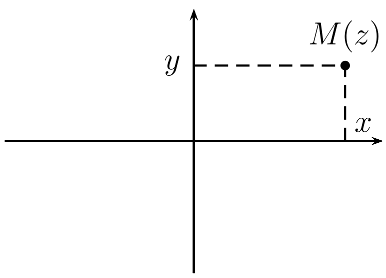
Exercice 5.27

z est un nombre complexe, et $z = x + y\mathrm{i}$. Résoudre les équations ci-dessous.

1. $(1+\mathrm{i})z - \mathrm{i}\overline{z} + 4\mathrm{i} = 0$ **2.** $2\mathrm{i}z - \overline{z} = 3\mathrm{i}$ **3.** $(3+2\mathrm{i})z = 2\mathrm{i}\overline{z} - 5\mathrm{i} = 0$

Exercice 5.28

L'affixe du point M représenté ci-contre est $z = x + y\mathrm{i}$.
Placer le point N d'affixe $\overline{z}$.



Exercice 5.29

z est un nombre complexe, et $z = x + y\mathrm{i}$. Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $Z = 2\mathrm{i}z - 3\overline{z} + 4$ soit un imaginaire pur.

5.5 Pour réviser

Dans le livre Hyperbole, le chapitre sur les complexes est le chapitre 9.

Exercices *Pour s'exercer*, corrigés page 467

ex. 2 et 5 p 237 : mettre un produit, un carré, des quotients sous forme algébrique

ex 12, 13 p 239 : équation du 2nd degré

ex 25, 26 p 241 : représentation géométrique, affixe

ex 30, 31 p 243 : conjugué

Exercices *Objectif Bac*, corrigés page 476

ex 160 1., 161 1. p 257

ex 165 .A1, A2., B1. p 259

ex 166 p 259 (sans corrigé, mais avec indications)

II Cours

5.1 Définitions et conséquences

Définition 5.1 (L'ensemble des nombres complexes)

Il existe un ensemble de nombres, nommé **ensemble des nombres complexes**, et noté $\mathbb{C}$, qui possède les propriétés ci-dessous.

- L'ensemble $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$.
- Les règles de calculs de l'addition et de la multiplication restent les mêmes que dans l'ensemble $\mathbb{R}$.
- Il existe un nombre complexe, nommé i tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
- Tout nombre complexe z s'écrit de manière **unique** sous la forme $z = x + y\mathrm{i}$, où x et y sont des nombres réels.

Définition 5.2 (Forme algébrique)

L'écriture $z = x + y\mathrm{i}$ est nommée **forme algébrique** du nombre complexe z.
x est la partie réelle de z, notée $\mathrm{Re}(z)$, y est la partie imaginaire de z, notée $\mathrm{Im}(z)$.

Propriété 5.1

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et le même partie imaginaire, autrement dit : $x + y\mathrm{i} = x' + y'\mathrm{i} \iff x = x'$ et $y = y'$.

Remarque : en particulier $x + \mathrm{i}y = 0$ si et seument si $x = y = 0$.

Définition 5.3 (Conjugué d'un nombre complexe)

Le **nombre conjugué** d'un nombre complexe $z = x + y\mathrm{i}$ est $\boxed{\overline{z} = x - y\mathrm{i}}$.

Exemples de conjugués

Le conjugué de $2 + 7\mathrm{i}$ est $\boxed{2 - 7\mathrm{i}}$ et le conjugué de $4 - 3\mathrm{i}$ est $4 - (-3\mathrm{i})$ soit $\boxed{4 + 3\mathrm{i}}$.

5.2 Opérations avec les complexes

5.2.a Exemples de calculs

Le but des exemples ci-dessous est de montrer que, quand on effectue une addition, une multiplication ou une division entre complexes, on peut toujours écrire le résultat sous la forme $x + y\mathrm{i}$.

Autrement dit, lorsqu'on effectue une opération entre nombres complexes, on obtient bien un nombre complexe.

- **Addition et soustraction**
  $(2 + 3\mathrm{i}) + (7 - 5\mathrm{i}) = (2 + 7) + (3 - 5)\mathrm{i} = \boxed{9 - 2\mathrm{i}}$
  $(9 + \mathrm{i}) - (4 - 2\mathrm{i}) = 9 + \mathrm{i} - 4 + 2\mathrm{i} = (9 - 4) + (1 + 2)\mathrm{i} = \boxed{5 + 3\mathrm{i}}$
- **Multiplication**
  $(4 - 9\mathrm{i}) \times (6 + 2\mathrm{i}) = 24 + 8\mathrm{i} - 54\mathrm{i} - 18\mathrm{i}^2 = 24 + 8\mathrm{i} - 54\mathrm{i} - 18 \times (-1) = 24 + 18 + 8\mathrm{i} - 54\mathrm{i}$
  $= \boxed{42 - 46\mathrm{i}}$

- **Inverse et division**
  Dans le calcul ci-dessous on multiplie au numérateur et au dénominateur par $3-4\mathrm{i}$, le **nombre conjugué de** $3+4\mathrm{i}$ (voir plus haut, la définition 5.3).
  $\dfrac{1}{3+4\mathrm{i}} = \dfrac{1\times(3-4\mathrm{i})}{(3+4\mathrm{i})\times(3-4\mathrm{i})} = \dfrac{3-4\mathrm{i}}{3^2-(4\mathrm{i})^2} = \dfrac{3-4\mathrm{i}}{9+16} = \dfrac{3-4\mathrm{i}}{25} = \boxed{\dfrac{3}{25}-\dfrac{4}{25}\mathrm{i}}$
  Dans le calcul ci-dessous on multiplie au numérateur et au dénominateur par $2+\mathrm{i}$ qui est le conjugué de $2-\mathrm{i}$.
  $\dfrac{5-3\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} = \dfrac{(5-3\mathrm{i})\times(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})\times(2+\mathrm{i})} = \dfrac{10-3\mathrm{i}^2+5\mathrm{i}-6\mathrm{i}}{2^2-\mathrm{i}^2} = \dfrac{13-\mathrm{i}}{4+1} = \dfrac{13-\mathrm{i}}{5} = \boxed{\dfrac{13}{5}-\dfrac{1}{5}\mathrm{i}}$

5.2.b Règles de calculs

Propriété 5.2

Pour deux nombres complexes z et z' tels que $z = x + y\mathrm{i}$ et $z' = x' + y'\mathrm{i}$, on a les égalités ci-dessous.

- **Addition :** $z + z' = (x + x') + (y + y')\mathrm{i}$
- **Multiplication :** $z \times z' = (xx' - yy') + (xy' + x'y)\mathrm{i}$
- **Inverse :** pour $z \neq 0$ (c'est à dire pour $x \neq 0$ et pour $y \neq 0$), $\dfrac{1}{z} = \dfrac{x - y\mathrm{i}}{x^2 + y^2}$
- **Division :** pour $z' \neq 0$, $\dfrac{z}{z'} = z \times \dfrac{1}{z'}$

Propriété 5.3 (Produit de deux conjugués)

Pour un nombre complexe $x + y\mathrm{i}$, et son conjugué $x - y\mathrm{i}$, on a l'égalité : $(x + y\mathrm{i}) \times (x - y\mathrm{i}) = x^2 + y^2$.

5.3 Équation du second degré à coefficients réels.

Le programme indique qu'un élève doit savoir résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation du second degré à coefficients réels.

Propriété 5.4

Résolution de l'équation $\boldsymbol{az^2 + bz + c = 0}$ (a, b, c sont des réels, $a \neq 0$, et z est un complexe).
On calcule le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$.

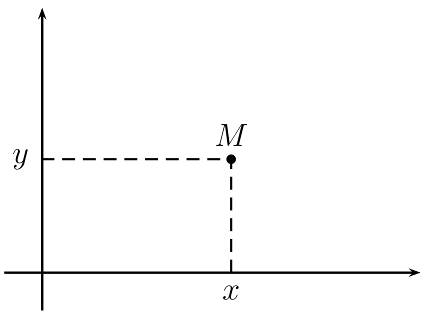
- Si Δ est positif ou nul, les solutions sont les mêmes que pour l'équation du second degré étudiée en première.
  $\Delta > 0$ il y a deux solutions qui sont des nombres réels : $z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
  $\Delta = 0$ il y a une solution qui est un nombre réel : $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, alors
  - il n'y a pas de solution réelle (cours de première) ;
  - il y a deux solutions complexes qui sont des nombres conjugués :
    $z_1 = \dfrac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ (si $\Delta < 0$, alors $-\Delta > 0$)

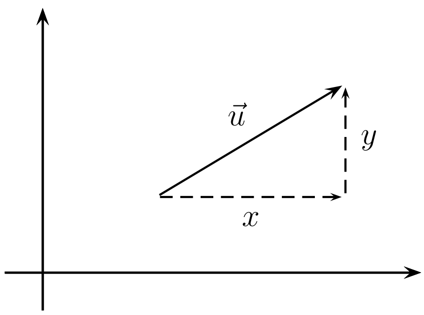
5.4 Représentation géométrique d'un nombre complexe.

Le programme indique qu'un élève doit savoir
- *représenter un nombre complexe par un point ou un vecteur ;*
- *déterminer l'affixe d'un point ou d'un vecteur.*

Définition 5.4 (Affixe d'un point ou d'un vecteur)

- Un nombre complexe $z_M = x + y\mathrm{i}$ est représenté dans un repère orthonormé du plan par le point M de coordonnées $M(x\ ;\ y)$.
  On dit alors que z_M est **l'affixe** du point M.
- Un nombre complexe $z_{\vec{u}} = x + y\mathrm{i}$ est représenté dans un repère orthonormé du plan par le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\vec{u}(x\ ;\ y)$.
  On dit alors que $z_{\vec{u}}$ est **l'affixe** du vecteur $\vec{u}$.





Remarque : en mathématiques le nom *affixe* est féminin.

Vocabulaire – Plan complexe

La définition précédente indique qu'on représente un nombre complexe par un point dans un repère orthonormé du plan.

On dit alors que le plan est *muni d'un repère orthonormé*, où qu'il est *rapporté à un repère orthonormé.* On précise parfois *repère orthonormé direct* $(O,\ \vec{u},\ \vec{v})$.

Enfin, on parle aussi de *plan complexe* muni d'un repère orthonormé.

Vocabulaire – Axe des réels et axe des imaginaires.

Dans le plan complexe,
- tous les points d'affixes réels sont sur l'axe des abscisses, qu'on appelle ainsi *l'axe des réels* ;
- tous les points d'affixes imaginaires purs sont sur l'axe des ordonnées, qu'on appelle ainsi *l'axe des imaginaires* ;

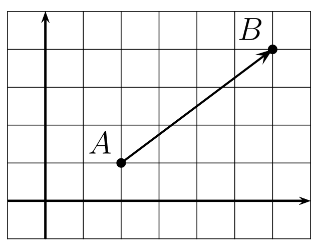
Propriété 5.5 (Affixe d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$)

Pour deux points A d'affixe z_A et B d'affixe z_B,
le nombre complexe $z_B - z_A$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exemple

$A(2 + \mathrm{i})$ $B(6 + 4\mathrm{i})$ $z_A = 2 + \mathrm{i}$ $z_B = 6 + 4\mathrm{i}$

$z_B - z_A = (6 + 4\mathrm{i}) - (2 + \mathrm{i}) = 6 + 4\mathrm{i} - 2 - \mathrm{i} = (6 - 2) + (4\mathrm{i} - \mathrm{i}) = 4 + 3\mathrm{i}$



5.5 Conjugué d'un nombre complexe

Remarque

La définition du conjugué d'un nombre complexe et une propriété ont été données plus haut :

- définition du conjugué d'un nombre complexe, voir définition 5.3 ;
- propriété du produit de deux conjugués, voir propriété5.7.

Propriété 5.6 (Règles de calculs sur les conjugués)

Pour deux nombres complexes z et z' :

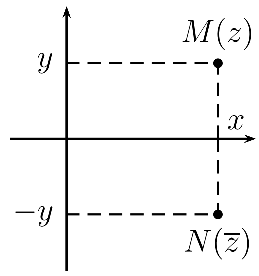
- le conjugué de la somme est la somme des conjugués : $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- le conjugué du produit est le produit des conjugués : $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$
- le conjugué de l'inverse est l'inverse du conjugué : $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$
- le conjugué du quotient est le quotient des conjugués : $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Propriété 5.7 (Deux points d'affixes conjugués)

Deux points du plan complexe d'affixes conjugués sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Exemple

Le point M d'affixe z et le point N d'affixe $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.



5.6 Utilisation de la calculatrice

Le nombre complexe i est accessible sur une calculatrice,

avec une calculatrice TI : 2nde [$\boldsymbol{i}$] **avec une calculatrice CASIO :** SHIFT [$\boldsymbol{i}$]

5.7 Utilisation de GeoGebra

On peut utiliser GeoGebra pour effectuer des calculs avec les nombres complexes.

Cliquer sur Affichage/Calcul formel

Pour obtenir le nombre complexe i, saisir : Alt + I

Exemple 1 : calcul de $(3 - 5\mathrm{i})(2 + \mathrm{i})$

On saisit la commande (3-5 i)(2+ i), on appuie sur Entrer, et on voit :

(3-5 i)(2+ i)
→ 11-7 i

Exemple 2 : développement de $(x - y\mathrm{i})(x + y\mathrm{i})$

(x-y i)(x+y i)
→ $x^2 + y^2$

Exemple 3 : forme algébrique de $\dfrac{1}{x+y\mathrm{i}}$

Développer[1/(x+y i)]

$\rightarrow \quad \dfrac{x}{x^2+y^2} - \mathrm{i}\dfrac{y}{x^2+y^2}$

Exemple 4 : résoudre l'équation d'inconnue z, $2z - 3\mathrm{i} = -4 + 5\mathrm{i}$

CRésoudre[2z-3 i =-4+5 i]

$\rightarrow$ {z= −2+4 i}

Exemple 5 : résoudre l'équation d'inconnue z, $z^2 + 3z + 3 = 0$

CRésoudre[z^2+3z+3=0]

$\rightarrow \quad \left\{ z = \dfrac{1}{2}\Big(\sqrt{3}\,\mathrm{i} - 3\Big), z = \dfrac{1}{2}\Big(-\sqrt{3}\,\mathrm{i} - 3\Big) \right\}$

Chapitre 6

Fonction exponentielle

I Exercices

6.1 Calculs – Équations – Inéquations

Exercice 6.1

Écrire chaque expression sous la forme d'une seule exponentielle.

1. $e^{0,3} \times e^{1,4}$ **2.** $\dfrac{e^2}{e^5}$ **3.** $\left(e^{-4}\right)^2$ **4.** $e^{2x} \times e^{x+3}$ **5.** $\dfrac{e^{2x-3}}{e^x}$ **6.** $\left(e^x\right)^3 \times e^{0,5x}$

Exercice 6.2

QCM : choisir la bonne réponse parmi les propositions ci-dessous. Pour tout réel x, e^{x-2} est égal à :

1. $\dfrac{e^x}{2}$ **2.** $\dfrac{e^x}{e^2}$ **3.** $e^x - e^2$

Exercice 6.3

1. Simplifier les expressions suivantes : $A = \dfrac{e^{6x} \times e^{2x}}{e^5}$ $B = \left(e^{3x}\right)^2 \times e^{5-x}$

2. Factoriser l'expression : $e^{2x} - 1$

Exercice 6.4

1. Transformer l'expression $3e^{5x} \times \left(-6e^{-2x+4}\right)$ sous la forme ae^{bx+c}.

2. Simplifier l'expression $\left(e^{3x} - e^{-3x}\right) \times \left(e^{3x} + e^{-3x}\right)$.

3. Transformer l'expression $\dfrac{e^{6x} \times \left(e^{x+3}\right)^2}{e^{x+2}}$ sous la forme e^{dx+e}.

Exercice 6.5

Transformer l'expression $\dfrac{e^x}{e^x+1}$ sous la forme $\dfrac{1}{1+e^{ax}}$

Exercice 6.6

Dans chaque cas, justifier si l'égalité est vraie pour tout réel x.

1. $\dfrac{e^{x+2}}{e^{2x+2}+e^2} = \dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$ **2.** $\dfrac{e^{5x+1}}{e^{10x}} = xe^{-5x}$

Exercice 6.7

1. Résoudre les équations ci-dessous.

   a) $e^{4x+6} = e^5$ b) $e^{x^2} = e$ c) $e^{5x-3} = 1$ d) $e^{-3x+2} - e^x = 0$ e) $e^{3x} = -4$

2. Résoudre l'équation : $(3x-7)\,e^x = 0$
3. Résoudre les inéquations ci-dessous.

   a) $e^{2x+5} > e^3$ b) $e^{4x} \leqslant e^{7x-6}$ c) $e^{-x} \leqslant e^x$ d) $e^{3x-2} < 0$ e) $e^x > 1$

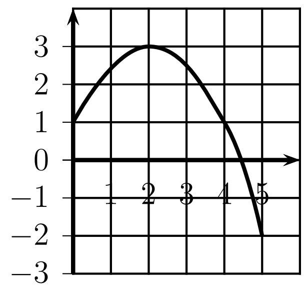
4. Résoudre l'inéquation : $(2x+5)\,e^{-x} < 0$

Exercice 6.8

Quel est le nombre de solutions de l'équation $e^{2x} + e^x - 6 = 0$? Justifier. Indication : poser $X = e^x$.

Exercice 6.9

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ et on donne sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans le repère ci-contre.



QCM : choisir la bonne réponse parmi les propositions **1. 2. 3.**

Sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$, l'équation $\exp(f(x)) = 1$

1. admet une solution
2. admet deux solutions
3. n'admet aucune solution

Exercice 6.10

Le polonium 218 se désintègre naturellement et le nombre de noyaux de polonium 218 présents à un instant t donné est donné par la fonction N définie par : $N(t) = N_0 e^{-0{,}0037t}$.

Le temps t est exprimé en secondes et N_0 est le nombre de noyaux à l'instant initial $t = 0$.

1. Si $N_0 = 2 \times 10^{23}$, donner une estimation du nombre de noyaux restant au bout de 100 secondes, puis de 200 secondes.
2. Tracer la représentation graphique de cette fonction sur l'écran de la calculatrice sur l'intervalle $[0s\ ;\ 600s]$.
3. La demi-vie d'une substance radioactive est le temps au bout duquel la masse de cette substance a diminué de moitié.

   Déterminer la demi-vie du polonium à une seconde près. Expliquer sa démarche.

6.2 Dérivée de la fonction exponentielle.

Exercice 6.11

Calculer les dérivées des fonctions définies ci-dessous Chacune de ces fonctions est dérivable sur l'intervalle I indiqué.

1. $f(x) = -0,5\,e^x + 7$ $\quad$ I $= \mathbb{R}$ $\qquad$ **2.** $f(x) = x^3 - e^x$ $\quad$ I $= \mathbb{R}$ $\qquad$ **3.** $f(x) = 3\,x\,e^x$ $\quad$ I $= \mathbb{R}$

4. $f(x) = \dfrac{4\,e^x}{x}$ $\quad$ I $=]0\ ;\ +\infty[$ $\qquad$ **5.** $f(x) = \dfrac{2 - e^x}{e^x}$ $\quad$ I $= \mathbb{R}$

Exercice 6.12

Calculer les dérivées des fonctions définies ci-dessous.

1. $f(x) = (5x-2)\mathrm{e}^x$ **2.** $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x + 4}$ **3.** $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + 10}{x}$

Exercice 6.13

QCM : choisir la bonne réponse parmi les propositions **1. 2. 3.**.

La fonction g définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x$ est la dérivée de la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par :

1. $\mathrm{G}(x) = \dfrac{x^2}{2}\mathrm{e}^x$ **2.** $\mathrm{G}(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$ **3.** $\mathrm{G}(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$

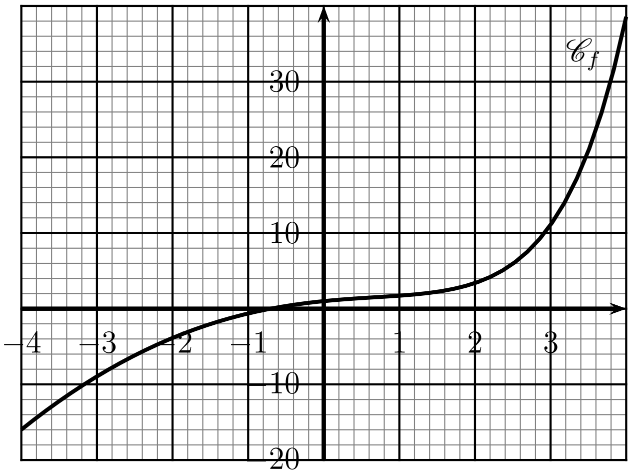
Exercice 6.14

La fonction f est définie sur l'intervalle $[-4\ ;\ 4]$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x^2$, et elle est représentée graphiquement ci-contre par la courbe $\mathscr{C}_f$. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[-4\ ;\ 4]$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. Placer sur la courbe $\mathscr{C}_f$ les points A et B d'abscisses respectives -2 et 3.

2. Calculer les coefficients directeurs les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A et en B. Arrondir les résultats à l'unité.

3. Tracer ces tangentes.



Exercice 6.15

La fonction f est définie sur l'intervalle $[-4\ ;\ 4]$ par $f(x) = (2x-7)\mathrm{e}^x$.

1. Calculer la dérivée.

2. Étudier le signe de la dérivée.

3. Dresser le tableau de variations. Indiquer les valeurs remarquables exactes.

4. Avec la calculatrice, tracer la courbe de cette fonction. Utiliser le tableau de variation pour bien régler les valeurs de la fenêtre.

Exercice 6.16

Même exercice que l'exercice 6.15 pour la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{2x+1}$.

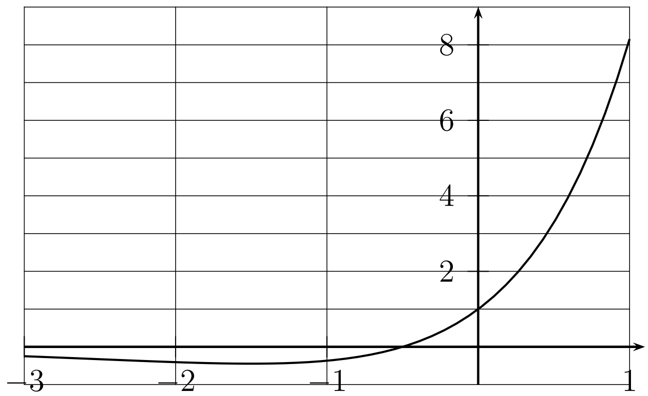
Exercice 6.17

Même exercice que l'exercice 6.15 pour la fonction f définie sur l'intervalle $[-4\ ;\ 1]$ par $f(x) = x^2\mathrm{e}^x$.

Exercice 6.18

La fonction f est définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 1]$ par $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^x$. La fonction f est représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous.

1. **a)** D'après la représentation graphique, combien la courbe $\mathscr{C}_f$ a-t-elle de tangentes qui passent par l'origine du repère ?
   b) Tracer approximativement ces tangentes.
   c) Quels sont approximativement les abscisses des points de contacts entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et ces tangentes.
2. Déterminer ces tangentes de manière exacte par des calculs.
   Indications :
   - Calculer la dérivée de f.
   - On appelle α l'abscisse d'un point A de la courbe $\mathscr{C}_f$.
   - Écrire l'équation réduite de la tangente en A en fonction de α.
   - Sachant que cette tangente passe par l'origine, écrire une équation d'inconnue α.
   - Calculer les abscisses exactes des points de contacts entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et ces tangentes.



6.3 Limites

6.3.a Limites en l'infini

Exercice 6.19 (limite de l'exponentielle en l'infini)

L'objectif de cet exercice est de déterminer les limites de e^x lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$. Le programme précise qu'un élève doit savoir justifier ces limites.

1. La fonction u est définie par : $u(x) = \mathrm{e}^x - x$.
   a) Calculer la dérivée.
   b) Étudier le signe de la dérivée.
   c) Dresser le tableau de variation de la fonction u sans les limites.
   d) En déduire que pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > x$.
2. Déterminer la limite de e^x lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Déterminer la limite de e^x lorsque x tend vers $-\infty$.
   Indication : pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-(-x)}$.

Exercice 6.20 (limites lorsque x tend vers l'infini, asymptotes)

1. Déterminer dans chaque cas la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction f.

a) $f(x) = \mathrm{e}^x + x$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ **c)** $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$

d) $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + \dfrac{1}{x^2+1}$ **e)** $f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$ **f)** $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$

2. Compléter le tableau ci-dessous. S'il y a une asymptote, donner son équation, sinon tracer une croix.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x))$						
Asymptote ?						
$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x))$						
Asymptote ?						

Exercice 6.21 (limites lorsque x tend vers l'infini)

Déterminer dans chaque cas la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction f.

1. $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x$ Indication : pour lever l'indétermination en $+\infty$, mettre e^x en facteur.

2. $f(x) = \dfrac{2-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$ Indication : pour lever l'indétermination en $+\infty$, mettre e^x en facteur au numérateur et au dénominateur.

6.3.b Trois autres limites à connaître

Exercice 6.22

L'étude des trois limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}\right)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(x\mathrm{e}^x)$ conduit à deux formes indéterminées.

Conjecturer les deux limites à l'aide de la calculatrice (tableau de valeurs et courbe). On admettra ces résultats.

Exercice 6.23

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^x - x)$

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}(\mathrm{e}^x - x)$. Indication : mettre d'abord x en facteur dans cette expression, lorsque $x \neq 0$.

Exercice 6.24

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}\Big((x-5)\mathrm{e}^{-x}\Big)$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big((x-5)\mathrm{e}^{-x}\Big)$. Indication : développer l'expression.

Exercice 6.25

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{e^x}{x+4}\right)$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x}{x+4}\right)$. Indication : mettre d'abord x en facteur au dénominateur.

Exercice 6.26

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \Big((5x-4)e^x\Big)$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \Big((5x-4)e^x\Big)$. Indication : développer d'abord l'expression.

Exercice 6.27

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \Big(xe^x - 2x\Big)$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \Big(xe^x - 2x\Big)$. Indication : factoriser d'abord l'expression.

6.3.c Limites en un point

Exercice 6.28 (limites lorsque x tend vers a, asymptotes)

1. Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to 0}(e^x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 3}(e^x)$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{e^{x+4}}{x^2}\right)$ **d)** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}}\left(\dfrac{e^{x+5}}{x}\right)$

e) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}}\left(\dfrac{e^{x+5}}{x}\right)$ **f)** $\lim\limits_{x \to 0}\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right)$ **g)** $\lim\limits_{\substack{x \to 6 \\ x<6}}\left(\dfrac{e^x}{x-6}\right)$

2. Compléter le tableau ci-dessous. S'il y a une asymptote, donner son équation, sinon tracer une croix.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
Limite							
Asymptote ?							

Exercice 6.29 (limites lorsque x tend vers a, asymptotes)

1. Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to 10}(e^x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to -5}(e^x)$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{e^{x-2}}{x^2}\right)$ **d)** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}}\left(\dfrac{e^{x+1}}{x}\right)$ **e)** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}}\left(e^{\frac{1}{x}}\right)$ **f)** $\lim\limits_{\substack{x \to 7 \\ x>7}}\left(\dfrac{e^x}{x-7}\right)$

2. Compléter le tableau ci-dessous. S'il y a une asymptote, donner son équation, sinon tracer une croix.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
Limite						
Asymptote ?						

Exercice 6.30

On sait d'après le cours sur les dérivées que le nombre dérivé d'une fonction f en a est $f'(a)$ et que $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \left(\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \right)$

Appliquer cela en remplaçant la fonction f par la fonction exponentielle, en remplaçant a par zéro, et h par x.

6.4 Études de fonctions

Exercice 6.31

La fonction f est définie par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

1. **a)** Déterminer les limites suivantes en justifiant : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (f(x))$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x))$

   b) En déduire la ou les asymptotes éventuelles. Donner l'équation chaque fois.
2. Calculer la dérivée de f.
3. Dresser le tableau de variation complet de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
4. Tracer la courbe à la calculatrice. Prendre : Xmin $= -0,1$ Xmax $= 5,5$ Xgrad $= 0,5$ et régler convenablement Ymin, Ymax, Ygrad.

Exercice 6.32

La fonction f est définie par $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$ sur $\mathbb{R}$ c'est à dire sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$.

1. **a)** Déterminer les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers $+\infty$. Justifier.

   b) En déduire la ou les asymptotes éventuelles. Donner l'équation chaque fois.
2. Calculer la dérivée de f.
3. Dresser le tableau de variation complet de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. Tracer la courbe à la calculatrice. Prendre : Xmin $= -1$ Xmax $= 6$ Xgrad $= 1$ et régler convenablement Ymin, Ymax, Ygrad.

6.5 Fonction e^u et phénomènes d'évolution

Avant de faire les exercices ci-dessous, lire le paragraphe du cours : *6.7 Dérivée de* e^u.

Exercice 6.33

Calculer la dérivée de chacune des fonctions définies ci-dessous.

1. $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$ **2.** $f(x) = 5\mathrm{e}^{-0,7x}$ **3.** $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$
4. $f(x) = \mathrm{e}^{6x} + \mathrm{e}^{-6x}$ **5.** $f(x) = x + \mathrm{e}^{-x}$ **6.** $f(x) = -6x + \mathrm{e}^{2x-3}$

Exercice 6.34

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$par $f(x) = (4x+3)\mathrm{e}^{5x}$. Cette fonction est dérivable.

Calculer sa dérivée. On pourra utiliser les indications ci-dessous :

- Pour tout réel x, on pose : $u(x) = 4x+3$ $v(x) = \mathrm{e}^{5x}$ $w(x) = 5x$;
- Pour tout réel x, calculer $u'(x)$, $w'(x)$, puis $v'(x)$.
- Pour tout réel x, calculer $f'(x)$.

Exercice 6.35

Calculer la dérivée de chacune des fonctions définies ci-dessous.

1. $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ **2.** $f(x) = 5(x-2)\mathrm{e}^{-0.4x}$ **3.** $f(x) = (x^2+1)\mathrm{e}^{-3x}$

Exercice 6.36

La fonction f est définie pour tout réel par $f(x) = \mathrm{e}^{5x}$

Parmi les fonctions ci-dessous, laquelle a pour dérivée la fonction f ?

1. $\mathrm{F}(x) = \mathrm{e}^{5x}$ **2.** $\mathrm{F}(x) = \dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{5x} + 3$ **3.** $\mathrm{F}(x) = 5\mathrm{e}^{5x} + 3$

Exercice 6.37

QCM : choisir chaque fois la bonne réponse parmi les propositions **a) b) c)**.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

1. L'équation $f(x) = 0$:

a) n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$

b) admet une seule solution dans $\mathbb{R}$

c) admet deux solutions dans $\mathbb{R}$

2. L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est :

a) $y = -3x+2$ **b)** $y = -x+2$ **c)** $y = x+2$

3. Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est :

a) $\dfrac{1}{\mathrm{e}^3}$ **b)** $\dfrac{-1}{\mathrm{e}^3}$ **c)** $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-3}}$

Exercice 6.38

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$. Cette fonction est dérivable de dérivée f'.

1. a) Justifier que pour tout réel x $f(x) = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^2}}$.

b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2. a) Pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, calculer $f'(x)$.

b) Étudier le signe de la dérivée.

3. Dresser le tableau de variation complet, en indiquant les valeurs remarquables exactes.

4. Tracer la courbe sur l'écran de la calculatrice, sur l'intervalle $[-0,5\ ;\ 3]$.

Exercice 6.39

Un médecin légiste arrive sur une scène de crime et mesure la température du corps et celle de la pièce. D'après la loi de Newton sur le refroidissement d'un corps, et avec les mesures prises sur place la température du corps en degrés Celsius, en fonction du temps t en heures est modélisée par : $T(t) = 12\mathrm{e}^{-0{,}174t} + 20$.

1. Calculer la température du corps à l'arrivée du légiste.

2. Déterminer l'heure du crime, en expliquant sa démarche.

3. a) Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} \big(f(t)\big)$.

b) Que signifie ce résultat ?

4. Étudier les variations de f depuis l'heure du crime, jusqu'à $+\infty$.

5. Dresser le tableau de variation complet de f.

Exercice 6.40

Suite à un accident industriel, un gaz se répand dans un local d'usine.

L'évolution du taux de gaz dans l'air peut être modélisé grâce à la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par : $\quad f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}$

où x est le nombre de minutes écoulées depuis l'accident et $f(x)$ le taux de gaz dans l'air exprimé en parties pour million (ppm).

Le plan est muni d'un repère orthogonal. La courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,7]$ est donnée plus bas.

Partie A

Répondre aux questions suivantes à l'aide de la courbe représentative de f avec la précision permise permises par le graphique.

1. Après combien de minutes le taux de gaz est-il maximum ? Quel est ce taux maximum ?

2. À partir de combien de minutes, le taux de gaz dans l'air est-il négligeable, c'est à dire inférieur ou égal à $0,08$ ppm ?

Partie B

1. a) On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe pour x élément de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

b) Donner le tableau complet des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

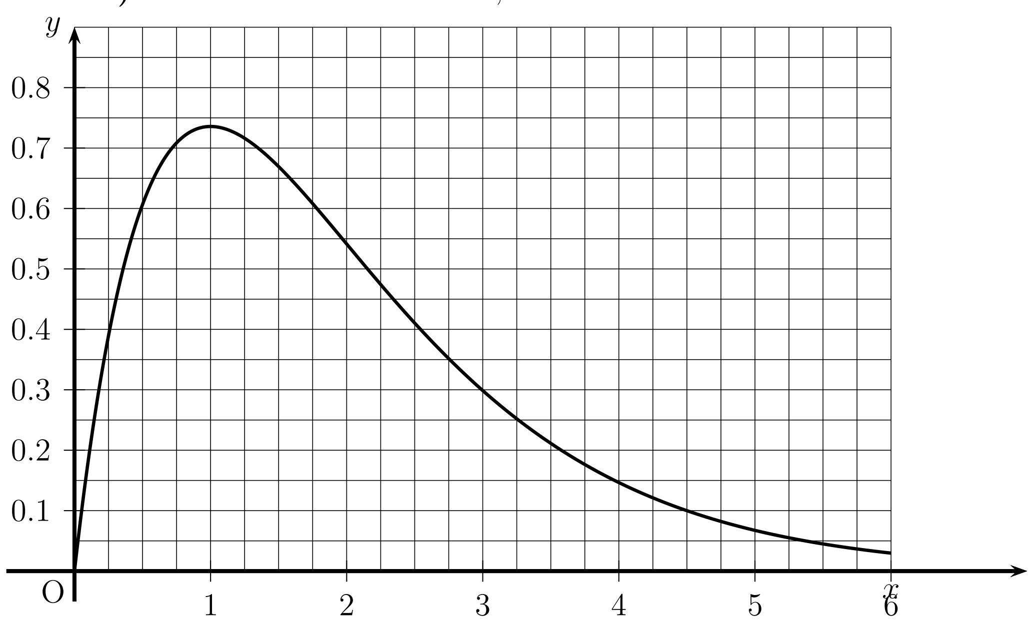
c) Après combien de minutes le taux de gaz est-il maximum ? Quel est ce taux maximum ? Justifier.

2. On rappelle que le taux de gaz dans l'air est négligeable lorsqu'il est inférieur ou égal à $0,08$ ppm.

a) Calculer $f(6)$ et arrondir le résultat au centième près.

b) Justifier que l'équation $\quad f(x) = 0,08 \quad$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1\,;\,6]$.

c) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude $0,001$.



Exercice 6.41

L'objectif de cet exercice est d'étudier deux fonctions, puis d'étudier laquelle modélise le mieux une situation.

Les fonctions f et g sont définies sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = 97,4\,\mathrm{e}^{0,084x}$ $g(x) = \dfrac{992}{1+12,3\mathrm{e}^{-0,155x}}$

Partie A

Pour chacune de ces deux fonctions, répondre aux questions ci-dessous.

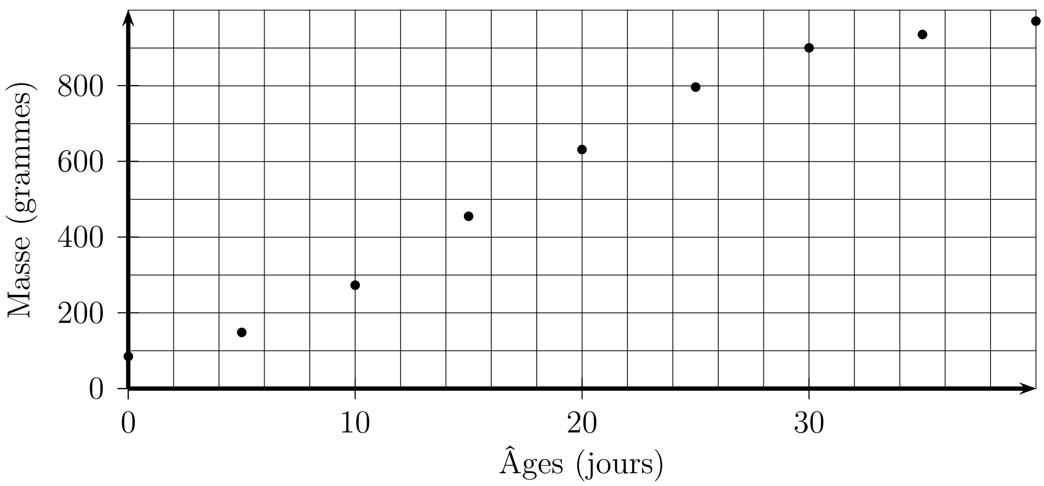
1. **a)** Déterminer la limite de la fonction lorsque x tend vers $+\infty$.
   b) La courbe représentative admet-elle une asymptote ? Si la réponse est oui, donner son équation.
2. Étudier le sens de variation de la fonction sur $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Dresser le tableau complet de variation de la fonction sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie B

Le tableau suivant indique l'évolution de la masse d'un goéland. et les points correspondants sont placés dans un repère plus bas.

Âge (jours)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Masse (grammes)	85	148	273	455	631	796	900	935	970

1. Quelle fonction modélise le mieux la situation ? Justifier.
2. Expliquer aussi pourquoi un des deux modèles n'est pas réaliste.



Exercice 6.42

Une étude montre que la probabilité d'avoir un problème cardiaque en fonction de son âge x en années est : $f(x) = \dfrac{1}{1+15,2\mathrm{e}^{-0,054x}}$.

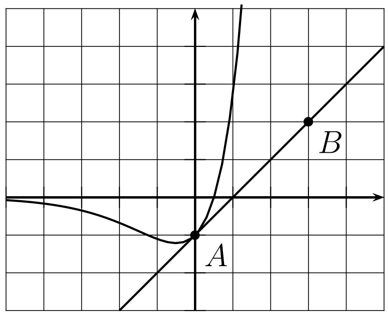
1. Étudier les variations de cette fonction sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2. **a)** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)\big)$.
   b) Que signifie ce résultat ?
3. À partir de quel âge la probabilité d'avoir un problème cardiaque est-elle supérieure à 0,5 ? Expliquer sa démarche.

6.6 Autres exercices

Exercice 6.43

La fonction f, est définie sous la forme $f(x) = (ax + b)\,\mathrm{e}^x$, et elle représentée ci-contre par la courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé d'unité 0,5 cm.

Les coordonnées des points A et B sont respectivement $A\ (0\ ;\ -1)$ et $B\ (3\ ;\ 2)$. Le point A appartient à la courbe $\mathscr{C}$, et la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en A est la droite (AB).



1. Justifier par un calcul que pour tout réel x, $f'(x) = (ax + a + b)\,\mathrm{e}^x$.
2. Déterminer a et b en justifiant.

Exercice 6.44

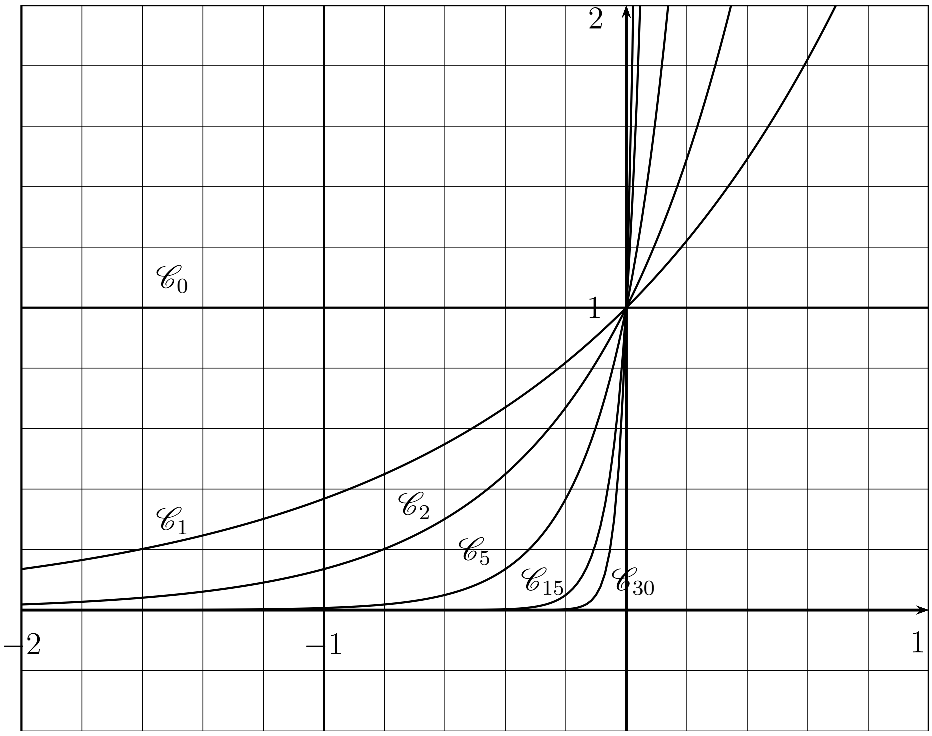
Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n pour tout réel x de l'intervalle $[-2\ ;\ 1]$ par : $f_n(x) = \mathrm{e}^{nx}$.

On note $\mathscr{C}_n$ la représentation graphique de la fonction f_n dans un repère orthogonal.

Quelques-unes des courbes $\mathscr{C}_n$ sont représentées ci-dessous.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction f_n est croissante et positive sur l'intervalle $[-2\ ;\ 1]$.
2. Montrer que les courbes $\mathscr{C}_n$ ont toutes un point commun A, et préciser ses coordonnées.
3. À l'aide des représentations graphiques, peut-on conjecturer le comportement des coefficients directeurs des tangentes en A aux courbes $\mathscr{C}_n$ pour les grandes valeurs de n ?

   Démontrer cette conjecture.



6.7 Pour réviser

Chapitre du livre n° 1 – Exponentielle

Rubrique *Pour s'exercer*, corrigés page 463

- ex 3 et 5 p 17 : à propos de la définition de la fonction exponentielle
- ex 9 et 12 p 19 : simplifier des expresssions, calculs
- ex 18, 20 p 21 : $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ étude de cette fonction, tangentes

Rubrique *Objectif bac*, corrigés page 470

- ex 74 p 29 (QCM) : calcul, limite, dérivée, tangente
- ex 75 p 29 (Vrai/Faux) : calcul, limite, dérivée, tangente
- ex 76 p 29 (Vrai/Faux) : courbe, tangente, variations
- ex 77 p 30 : étude du signe d'une fonction auxiliaire
- pour étudier les variations d'une fonction, équation $f(x) = 0$
- ex 78 p 31 : fonction, dérivée, variations, tangente, limites, position relative de la courbe et d'une droite
- ex 79 p 31 : étude d'un phénomène d'évolution, le processus d'élimination d'un médicament

Chapitre du livre n° 4 – Limites de fonctions

Les exercices résolus

- ex 26 p 99 : $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos(x)$, étudier une limite par encadrement
- ex 33 p 101 : exponentielle, limite de fonction composée
- ex 34 p 101 : exponentielle, utilisation de plusieurs limites du cours

Rubrique *Pour s'exercer*, corrigés page 464

- ex 27, 30 p 99 : limites et comparaisons
- ex 35, 36 p 101 : limites

Rubrique *Objectif bac*, corrigés page 472

- ex 98 4) 5) p 107 (Vrai/Faux) : limites
- ex 100 p 108 : famille de fonctions, problème complet de type bac
- ex 101 p 109 : une limite simple, une forme indéterminée, une démonstration de cours.

Pour réviser les démonstrations de cours

Les exercices suivants ne sont pas corrigés en fin de livre, mais dans le cours sur fiche ou dans le livre. Ils sont signalés par la mention *ROC* qui veut dire *Restitution Organisée de Connaissances.*

Ex 34 p 25, ex 42 p 26, ex 59 p 27.

II Cours

6.1 Définition et conséquences

Propriété 6.1 (admise)

- On admet l'existence d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$.
- Cette fonction f est dérivable, et donc continue.

Le programme précise qu'un élève doit savoir démontrer la propriété ci-dessous.

Propriété 6.2

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Démonstration (à connaître)

➜ **Démontrons d'abord que pour tout réel x, $f(x) \neq 0$.**

On appelle g la fonction définie par : $g(x) = f(x) \times f(-x)$.

Nous allons démontrer que cette fonction g est constante, pour cela, calculons la dérivée de g :

Pour tout réel x, on a : $g'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times (-f'(-x)) = f'(x) \times f(-x) - f(x) \times f'(-x)$

or : $f'(x) = f(x)$ et $f'(-x) = f(-x)$

donc : $g'(x) = 0$

or, une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée nulle, est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

Donc la fonction g est constante.

Calculons maintenant $g(0)$: $g(0) = f(0) \times f(0) = 1$

Puisque la fonction est constante et puisque $g(0) = 1$, on peut affirmer que pour tout réel x, $g(x) = 1$.

Cela signifie que pour tout réel x, $f(x) \times f(-x) = 1$.

Par conséquent pour tout réel x, $f(x)$ est différent de zéro.

➜ **Démontrons qu'il existe une unique fonction telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$.**

Supposons qu'il existe deux fonctions f_1 et f_2 telles que $f_1' = f_1$ et $f_1(0) = 1$ et $f_2' = f_2$ et $f_2(0) = 1$.

Nommons h la fonction définie par $h(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$.

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, puisque d'après la propriété précédente, pour tout réel x, $f_2(x)$ est différent de zéro.

Puisque les fonctions f_1 et f_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que la fonction f_2 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Calculons sa dérivée. Pour tout réel x, on a :

$h'(x) = \dfrac{f_1'(x)f_2(x) - f_1(x)f_2'(x)}{(f_2(x))^2}$ or $f_1'(x) = f_1(x)$ et $f_2'(x) = f_2(x)$

Donc : $h'(x) = \dfrac{f_1(x)f_2(x) - f_1(x)f_2(x)}{(f_2(x))^2} = 0$

Par conséquent la fonction h est constante et égale à $h(0)$.

Or : $h(0) = \dfrac{f_1(0)}{f_2(0)} = 1$

Nous avons prouvé que pour tout réel x, $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1$, autrement dit $f_1(x) = f_2(x)$.

Ainsi, il existe bien une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Définition 6.1
L'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$ est appellée la fonction **exponentielle** et on la note **exp**.

D'après les propriétés 6.1 et 6.2 nous en déduisons la propriété ci-dessous.

Propriété 6.3
- La fonction exp est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$.
- Pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$.
- Pour tout réel x, $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

Les propriétés démontrées précédemment nous permettent d'en dire un peu plus sur la fonction exponentielle.

En fait, on sait que cette fonction ne s'annule pas, et comme $\exp(0) = 1$, pour tout réel x, $\exp(x) > 0$, en effet, il ne peut y avoir un réel a tel que $\exp(a) < 0$, car sinon d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existerait un nombre α entre 0 et a tel que $\exp(\alpha) = 0$, ce qui est impossible.

Donc la fonction exp est strictement positive sur $\mathbb{R}$, or elle est égale à sa dérivée, donc sa dérivée est aussi strictement positive sur $\mathbb{R}$. D'où finalement la propriété ci-dessous.

Propriété 6.4
- La fonction exp est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

6.2 Relation fonctionnelle, notation e^x

On peut démontrer la propriété ci-dessous, qui est la propriété fondamentale de calcul de l'exponentielle.

Sa démonstration n'est pas exigible, c'est pourquoi elle n'apparaît pas dans ce cours. Cette démonstration est traitée dans l'exercice résolu n° 1 page 17 du manuel Hyperbole de TS, Nathan 2012.

Propriété 6.5 (relation fonctionnelle)
Pour tous réels x et y , $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.

Cette propriété va nous permettre d'écrire l'exponentielle d'un nombre sous une autre forme, en effet appelons e le nombre $\exp(1)$.

On a alors : $\exp(2) = \exp(1 + 1) = \exp(1) \times \exp(1) = \mathrm{e}^2$, et de même $\exp(3) = \mathrm{e}^3$, $\exp(4) = \mathrm{e}^4$, etc.

En fait, par récurrence, on peut démontrer que pour tout entier naturel n, $\exp(n) = \mathrm{e}^n$.

On admettra qu'on peut étendre cette écriture à tous les nombres réels et on retiendra la propriété ci-dessous.

Propriété 6.6
On appelle e le nombre $\exp(1)$: $\mathrm{e} = \exp(1) \approx 2,718$ et pour tout réel x, on a : $\exp(x) = \mathrm{e}^x$

Remarque – Lien avec les suites géométriques

Il est indiqué ci-dessus que pour tout entier naturel n, $\exp(n) = e^n$, or la suite (e^n) est une suite géométrique.

En fait, pour tout réel q positif on connaît la suite géométrique (q^n), mais on peut aussi définir la fonction f définie par $f(x) = q^x$, et cette fonction a des propriétés analogues à celle de la fonction exponentielle.

6.3 La fonction exponentielle

Récapitulons ci-dessous ce que l'on sait sur la fonction exponentielle.

Les propriétés de calculs reprennent deux propriétés précédentes et sont complétées par trois formules.

Propriété 6.7 (expression, signe, dérivée, variations)

- La fonction exponentielle est définie par : $f(x) = e^x$
- $e \approx 2,718$
- Pour tout réel x, $e^x > 0$
- Sa dérivée est définie par : $f'(x) = e^x$
- La fonction exponentielle est strictement croissante.
  Pour tous réels x et y, $x < y \iff e^x < e^y$ et $x = y \iff e^x = e^y$

Propriété 6.8 (propriétés de calculs)

Pour tous réels x et y ,

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \qquad e^{x+y} = e^x e^y \qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \qquad (e^x)^y = e^{xy} \qquad e^{\frac{x}{2}} = \sqrt{e^x}$$

Le programme précise qu'un élève doit savoir utiliser les propriétés ci-dessus pour transformer une écriture.

6.4 Utilisation de la calculatrice

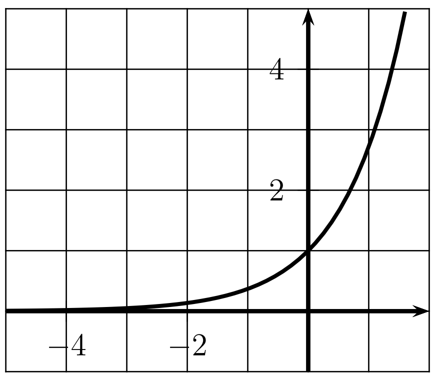
TI 82 :

- pour le nombre e : $\boxed{\text{2nde}}$ [e]
- pour l'exponentielle d'un nombre : $\boxed{\text{2nde}}$ [e^x]

CASIO : $\boxed{\text{SHIFT}}$ [e^x]

6.5 Représentation graphique

Le programme indique qu'un élève doit connaître le sens de variation et la représentation graphique de la fonction exponentielle.



6.6 Limites

6.6.a Limites en l'infini

Le programme précise qu'un élève doit savoir démontrer la propriété ci-dessous.

Propriété 6.9

$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$

Démonstration (à connaître)

➜ **Démontrons d'abord que pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > x$.**

On appelle u la fonction définie par : $u(x) = \mathrm{e}^x - x$.

Calculons sa dérivée : pour tout réel x, $u'(x) = \mathrm{e}^x - 1$.

Or on sait que la fonction exponentielle est strictement croissante par conséquent :

si $x \leqslant 0$, alors $\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^0$, et si $x \geqslant 0$, alors $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^0$.

Or $\mathrm{e}^0 = 1$, donc : si $x \leqslant 0$, alors $\mathrm{e}^x \leqslant 1$, et si $x \geqslant 0$, alors $\mathrm{e}^x \geqslant 1$.

Par conséquent : si $x \leqslant 0$, alors $u'(x) \leqslant 0$, et si $x \geqslant 0$, alors $u'(x) \geqslant 0$.

On obtient ainsi le tableau de variations ci-dessous.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	
$u(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

D'après ce tableau, la fonction u admet un minimum égal à 1, par conséquent, pour tout réel x : $u(x) > 0$, autrement dit $\mathrm{e}^x - x > 0$, c'est à dire $\mathrm{e}^x > x$.

➜ **Démontrons que :** $\lim\limits_{x\to+\infty} (\mathrm{e}^x) = +\infty$

Nous avons démontré que pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > x$, or $\lim\limits_{x\to+\infty}(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(\mathrm{e}^x) = +\infty$.

➜ **Démontrons que :** $\lim\limits_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^x) = 0$

Pour tout réel x, on a : $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-(-x)} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}}$.

Lorsque x tend vers $-\infty$, $-x$ tend vers $+\infty$, par conséquent $\lim\limits_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^{-x}) = +\infty$.

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}}\right) = 0$, autrement dit, on obtient bien : $\lim\limits_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^x) = 0$.

6.6.b Trois autres limites à connaître

Le programme précise qu'un élève doit connaître et exploiter la première et la troisième limites ci-dessous. La deuxième n'est pas explicitement au programme, mais elle est souvent utilisée.

Propriété 6.10

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (x\mathrm{e}^x) = 0$

6.6.c Nombre dérivé de l'exponentielle en zéro

Un commentaire du programme préconise de faire le lien entre le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 et la limite en 0 de $\dfrac{e^x - 1}{x}$.

Propriété 6.11

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\right) = \exp'(0) = 1$$

Explications

On sait d'après le cours sur les dérivées que le nombre dérivé d'une fonction f en a est $f'(a)$ et que $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}\right)$

Appliquons cela en remplaçant la fonction f par la fonction exponentielle, en remplaçant a par zéro, et h par x.

Cela nous donne : $\exp'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\exp(0+x) - \exp(0)}{x}\right)$ or $\exp'(0) = \exp(0) = \mathrm{e}^0 = 1$.

On obtient donc bien : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\right) = \exp'(0) = 1$.

6.7 Dérivée de e^u

Propriété 6.12

Si la fonction u est dérivable sur un intervalle, alors la fonction définie par $f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable sur cet intervalle et sa dérivée est donnée par : $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$

Remarque

Un commentaire du programme préconise d'étudier des exemples de fonctions de la forme e^u notamment des fonctions définies sous la forme $f(x) = \mathrm{e}^{-kx}$ ou $f(x) = \mathrm{e}^{-kx^2}$ $(k > 0)$, qui sont utilisées dans des domaines variés.

Ces fonctions figurent souvent dans les exercices de bac, et une fonction de ce type est utilisée dans le chapitre de probabilité intitulé *Loi normale*.

Certains exercices font donc appel à des fonctions de ce type.

Chapitre 7

Fonctions trigonométriques

I Exercices

7.1 Fonctions sinus et cosinus, propriétés

Exercice 7.1 (Courbe de la fonction sinus)

Le but de cet exercice est de tracer la courbe de la fonction cosinus et d'en étudier quelques propriétés

Avant de commencer l'exercice, vérifier que sa calculatrice est réglée en radians.

Sur TI : $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{mode}}$.

1. Tracer à l'écran de la calculatrice la représentation graphique de la fonction cosinus sur l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$.
2. a) Quelles sont les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses ? Résoudre une équation pour répondre.
   b) Même question pour les abscisses des points de la courbe d'ordonnée 1.
   c) Même question pour les abscisses des points de la courbe d'ordonnée -1.
3. a) La courbe a une symétrie. Préciser laquelle.
   b) Justifier en comparant $\cos(-x)$ et $\cos(x)$.
4. a) Qu'obtient-on si l'on translate la portion de courbe de la fonction cosinus sur l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 0]$ par la translation de vecteur $\vec{u}(2\pi\ ;\ 0)$.
   b) Justifier par une propriété du cosinus.

Exercice 7.2 (Parité)

Pour chacune des fonctions définies ci-dessous, justifier si cette fonction est paire, impaire, ou ni paire ni impaire. Vérifier chaque fois à la calculatrice si la courbe est symétrique ou non.

- Fonction paire : $f(-x) = f(x)$, symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, paragraphe 7.3.b du cours.
- Fonction impaire : $f(-x) = -f(x)$, symétrie par rapport à l'origine, paragraphe 7.2.b du cours.

1. $f(x) = \sin(2x)$ **2.** $f(x) = \cos(3x)$ **3.** $f(x) = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ **4.** $f(x) = x\sin x$

Exercice 7.3 (Périodicité)

Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \sin(2x)$

Nous allons comparer les périodes de ces deux fonctions.

1. Sur l'écran de la calculatrice, tracer la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$, en fixant la graduation en abscisses à $\dfrac{\pi}{2}$.
2. Tracer ensuite la courbe de la fonction g.
3. La période de la fonction sinus est 2π parce que pour tout réel x, $\sin(x+2\pi) = \sin x$.
   a) Quelle semble être la période T de la fonction g ?
   b) Démontrer que ce nombre T est bien la période de la fonction g, c'est à dire démontrer que pour tout réel x, $g(x+T) = g(x)$.

Exercice 7.4 (Oscillateur mécanique non amorti)

Un solide est suspendu à un ressort, au repos. À cette position on considère que la hauteur y du centre de gravité du solide est $y = 0$. On le tire de 5 cm vers le bas et on le lâche. t représente le temps écoulé en secondes à partir de l'instant où on lâche le solide. La fonction f définie ci-dessous donne la hauteur y du centre de gravité du solide en fonction de t, autrement dit : $y = f(t)$.

$f(t) = 5\cos(2\pi t - \pi)$

1. Sur l'écran de la calculatrice, tracer la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 4]$, en fixant la graduation en abscisses à 0,5.
2. Décrire le mouvement du solide pendant ces 4 secondes.
3. a) Calculer $f(0)$, $f(0,5)$ et $f(1)$.
   b) Que signifient ces résultats ?
4. a) Conjecturer la période T.
   b) Justifier par un calcul que la période est bien ce nombre T.

7.2 Calculs de dérivées, extrémum

Exercice 7.5

Le but de cet exercice est de déterminer la dérivée de la fonction sinus.

On rappelle que pour un nombre réel x fixé, $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$

1. Justifier par des calculs que pour tous réels x et h :
   $\dfrac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \sin(x) \times \dfrac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x) \times \dfrac{\sin(h)}{h}$
2. À l'aide de la calculatrice, conjecturer les limites de $\dfrac{\cos(h)-1}{h}$ et de $\dfrac{\sin(h)}{h}$ lorsque h tend vers zéro. On admettra ces résultats. [1]
3. En déduire la limite de $\dfrac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$ lorsque h tend vers zéro. Le nombre x est fixé et la limite à donner est en fonction de x.
4. Quelle est donc la dérivée de la fonction sinus ?

Exercice 7.6

Le but de cet exercice est de déterminer la dérivée de la fonction cosinus.

1. Justifier par des calculs que pour tous réels x et h :
   $\dfrac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = \cos(x) \times \dfrac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x) \times \dfrac{\sin(h)}{h}$

1. L'activité 2 page 175 du manuel Hyperbole fait démontrer ces résultats.

2. En déduire la limite de $\dfrac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}$ lorsque h tend vers zéro. Le nombre x est fixé et la limite à donner est en fonction de x. On pourra réutiliser les résultats de la question **2.** de l'exercice 7.5.

3. Quelle est donc la dérivée de la fonction cosinus ?

Exercice 7.7

Calculer la dérivée de chacune des fonctions définies ci-dessous.

1. $f(x) = \sin x - \cos x$ **2.** $f(x) = x \sin x$ **3.** $f(x) = \cos^3 x = \big(\cos(x)\big)^3$ **4.** $f(x) = \dfrac{x}{\cos x}$

Exercice 7.8

Lire la propriété 7.8 page 132, puis calculer la dérivée de chacune des fonctions définies ci-dessous.

1. $f(x) = \sin(4x)$ **2.** $f(x) = \cos\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ **3.** $f(x) = 2\sin\left(5x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

7.3 Études de fonctions

Exercice 7.9

La fonction f est définie sur $[0\ ;\ \pi]$ par $f(x) = 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

1. Sur l'écran de la calculatrice, tracer la représentation graphique de la fonction f.

2. La fonction f atteint un maximum sur $[0\ ;\ \pi]$. Déterminer ce maximum et la valeur de x où il est atteint. Justifier.

Exercice 7.10

La fonction f est définie par : $f(x) = \dfrac{\cos x}{3 + \cos x}$ sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ 3\pi]$.

1. Nous étudierons la fonction f sur $[-\pi\ ;\ 3\pi]$, mais cette fonction est en fait définie sur $\mathbb{R}$. Justifier pourquoi.

2. Démontrer que la fonction f est paire.

3. Démontrer que la fonction f est périodique, de période 2π.

4. **a)** Calculer la dérivée de f.

b) Étudier le signe de la dérivée sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$, en utilisant le cercle trigonométrique et sans justifier.

5. **a)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.

b) Compléter ce tableau de variations sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ 0]$, sachant que la fonction f est paire.

c) Compléter ce tableau de variations sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ 3\pi]$, sachant que la fonction f est périodique de période 2π.

6. Sur l'écran de la calculatrice, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ 3\pi]$.

Exercice 7.11

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction ci-dessous.

La fonction f est définie par : $f(x) = 3\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{8}\ ;\ \dfrac{3\pi}{8}\right]$.

1. **a)** Calculer la dérivée de f.
   b) Résoudre l'équation $f'(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
   c) Résoudre l'équation $f'(x) = 0$ sur $\left[-\frac{\pi}{8}\ ;\ \frac{3\pi}{8}\right]$.
2. Calculer les images des valeurs remarquables et dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\left[-\frac{\pi}{8}\ ;\ \frac{3\pi}{8}\right]$.

Exercice 7.12

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction ci-dessous.

La fonction f est définie par : $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

1. **a)** Indiquer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers zéro.
   b) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Indication : justifier d'abord que pour tout réel x strictement positif, $-\frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$.
2. **a)** Calculer la dérivée de f.
   b) On admet que l'équation $f'(x) = 0$ a une seule solution α sur l'intervalle $]0\ ;\ 2\pi]$. Avec la calculatrice, déterminer la valeur de α arrondie au centième près.
3. Sans justifier, dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0\ ;\ 2\pi]$.
4. Sur l'écran de la calculatrice, tracer les représentations graphiques de la fonction f et des fonctions u et v définies par $u(x) = -\frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0\ ;\ 6\pi]$.

Exercice 7.13

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 10\sin x$.

1. Sur l'écran de la calculatrice, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 20\pi]$.
2. Conjecturer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Démontrer cette limite. Indication : justifier que pour tout réel x, $f(x) \geqslant x - 10$.

Exercice 7.14

Partie A

La fonction tangente est définie par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$.

1. Expliquer pourquoi la fonction tangente n'est définie ni en $-\frac{\pi}{2}$, ni en $\frac{\pi}{2}$.
2. La fonction tangente est-elle paire ou impaire ? Justifier.
3. Déterminer la limite de la fonction tangente lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$ et $x < \frac{\pi}{2}$, et préciser l'asymptote.
4. Justifier le sens de variation de la fonction tangente sur l'intervalle $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$.
5. Tracer le tableau de variation de la fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$.
   a) Compléter ce tableau sur $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ d'après les réponses aux questions **3.** et **4.**
   b) Compléter ce tableau sur $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ 0\right[$ d'après la réponse à la question **2.**

Partie B

La fonction tangente est en fait définie sur tout intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$ pour tout entier k, notamment sur l'intervalle $\left]\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{3\pi}{2}\right[$.

1. Justifier que la fonction tangente est périodique de période π.

2. En déduire le tableau de variations de la fonction tangente sur l'intervalle $\left]\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{3\pi}{2}\right[$.

7.4 Pour réviser

Chapitre 7 – Fonctions sinus et cosinus

Rubrique *Pour s'exercer*, corrigés page 466

- ex 5 p 177 : limite en zéro
- ex 9 p 179
- ex 12, 13 p 181

Rubrique *Objectif bac*, corrigés page 474

- ex 64, 65, 66 p 187
- ex 67 p 188
- ex 68 à 69 p 189
- L'ex 70 p 189 n'a pas son corrigé en fin de livre mais il y a une aide.

Chapitre 4 – Limites de fonctions

Ex 27, 30 p 99, corrigés page 464.

Ex 98 p 107, corrigé page 472.

II Cours

7.1 Rappels

7.1.a Triangle rectangle (3e)

Définition

Dans un triangle rectangle,

$$\text{cosinus d'un angle aigu} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à cet angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

$$\text{sinus d'un angle aigu} = \frac{\text{longueur du côté opposé à cet angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

$$\text{tangente d'un angle aigu} = \frac{\text{longueur du côté opposé à cet angle}}{\text{longueur du côté adjacent à cet angle}}$$

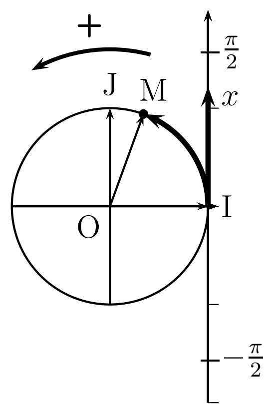
7.1.b Cercle trigonométrique (2de)

- Dans un repère orthonormé, on appelle cercle trigonométrique le cercle dont le centre est l'origine du repère et dont le rayon est 1.
- Sur ce cercle, le sens d'orientation positif est le sens contraire des aiguilles d'une montre.

7.1.c Mesure d'un angle en radian (1re S)

Mesure en radians d'un angle orienté de vecteurs
Dans un repère orthonormé (O, I, J) un point M sur le cercle trigonométrique est associé à un nombre réel x.
On dit que le nombre réel x est une mesure en radians de l'angle orienté de vecteurs $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right)$.

Le radian est la mesure de l'angle orienté de vecteur $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right)$ tel que le point M sur le cercle trigonométrique est associé à 1.



7.1.d Radian et degré (1re S)

$\boxed{\pi \text{ rad} = 180°}$ $\quad 1 \text{ rad} = \dfrac{180°}{\pi} \approx 57,3° \quad 1° = \dfrac{\pi \text{ rad}}{180} \approx 0,0175 \text{ rad}$

Pour convertir de degrés en radians ou inversement, on utilise le tableau de proportionnalité ci-dessous. Pour un angle donné, d est une mesure de cet angle en degrés et r la mesure correspondante en radians.

Mesure en degrés	180	d
Mesure en radians	π	r

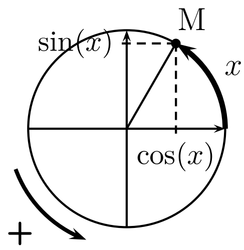
7.1.e Les mesures d'un angle orienté et sa mesure principale (1re S)

- Si x est une mesure en radians d'un angle de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$, alors tous les nombres réels de la forme $x + 2k\pi$ où k est un entier relatif, sont également des mesures en radians de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.
- Parmi les mesures d'un angle $(\vec{u}, \vec{v})$, la seule qui appartient à l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ est appelée mesure principale de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.

7.1.f Cosinus et sinus d'un nombre réel (2de)

Définition 7.1

Un point M du cercle trigonométrique est associé à un nombre réel x.
- on appelle cosinus de x l'abscisse du point M ;
- on appelle sinus de x l'ordonnée du point M.



Propriétés

Pour tout nombre réel x, $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$ $\quad -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ $\quad -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$

Valeurs remarquables

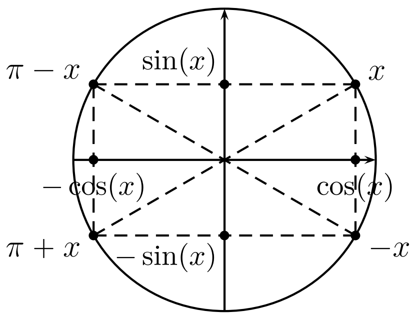
x (°)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
x (rad)	0	30°	45°	60°	90°
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

7.1.g Cosinus et sinus d'angles associés (1re S)

$$\begin{cases} \cos(-x) = \cos(x) \\ \sin(-x) = -\sin(x) \end{cases}$$

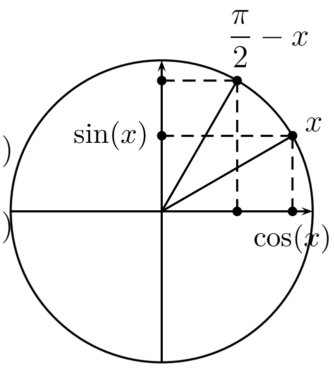
$$\begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos(x) \\ \sin(\pi - x) = \sin(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos(x) \\ \sin(\pi + x) = -\sin(x) \end{cases}$$

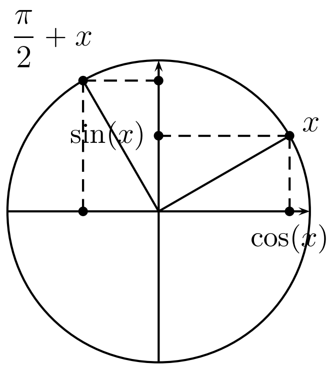


$$\begin{cases} \cos(x + 2\pi) = \cos(x) \\ \sin(x + 2\pi) = \sin(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \end{cases}$$

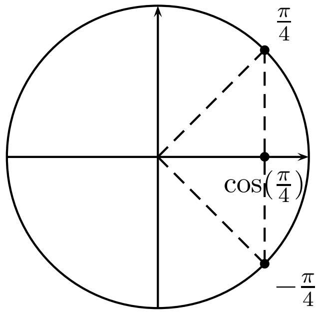


$$\begin{cases} \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) \\ \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \end{cases}$$



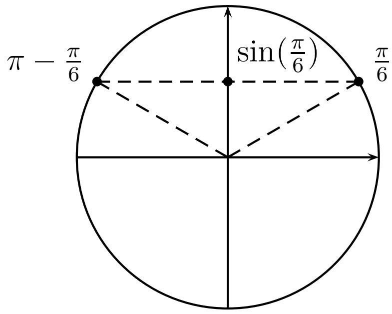
7.1.h Équations $\cos x = \cos a$ et $\sin x = \sin a$ (1re S)

Exemple 1
Résolution de l'équation $\cos(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.
On schématise cette équation sur le cercle trigonométrique.



Les solutions sont les nombres réels de la forme $\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ et $-\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, où k est un nombre entier relatif.

Exemple 2
Résolution de l'équation $\sin(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.
On schématise cette équation sur le cercle trigonométrique.
Calcul : $\pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{6\pi}{6} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$



Les solutions sont les nombres réels de la forme $\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$, où k est un nombre entier relatif.

7.1.i Formules d'addition et de duplication des cosinus et sinus. (1re S)

Propriété – Formules d'addition

Pour tous nombres réels a et b, $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ $\quad$ $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ $\quad$ $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

Propriété – Formules de duplication

Pour tous nombres réels a et b : $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ $\quad$ $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ $\quad$ $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

7.2 La fonction sinus

7.2.a Dérivée de la fonction sinus

Propriété 7.1

La dérivée de la fonction sinus est la fonction cosinus. Autrement dit pour tout réel x : $\sin'(x) = \cos(x)$.

Un commentaire du programme préconise de faire le lien entre le nombre dérivé de la fonction sinus en 0 et la limite en 0 de $\dfrac{\sin x}{x}$.

Propriété 7.2

La limite de $\dfrac{\sin x}{x}$ lorsque x tend vers 0 est égale au nombre dérivé de la fonction sinus en zéro, qui est égal à 1.
Autrement dit : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = \sin'(0) = 1$

Démonstration

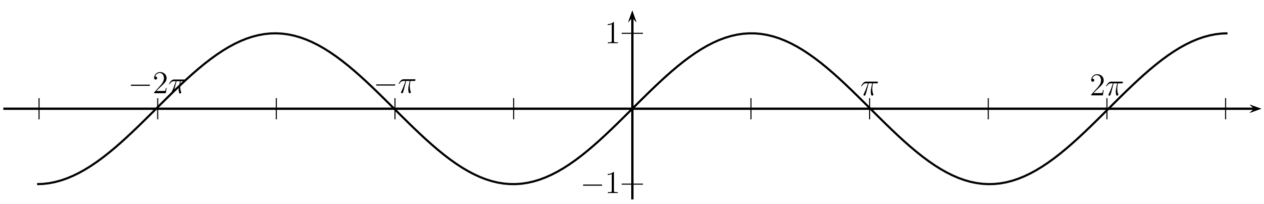
On sait d'après le cours sur les dérivées que le nombre dérivé d'une fonction f en a est $f'(a)$ et que $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$

Appliquons cela en remplaçant la fonction f par la fonction sinus, en remplaçant a par zéro, et h par x.

Cela nous donne : $\sin'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(0+x)-\sin(0)}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$ or $\sin'(0) = \cos(0) = 1$.

On obtient donc bien : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = \sin'(0) = 1$.

7.2.b Représentation graphique de sinus



Propriété 7.3

La courbe représentative de la fonction sinus dans un repère du plan est symétrique par rapport à l'origine de ce repère.

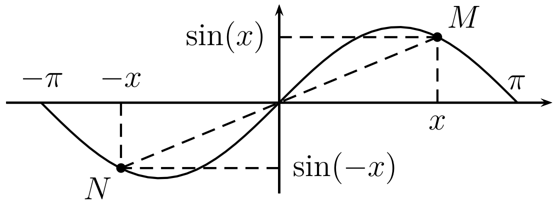
Démonstration et figure

Appelons $\mathscr{C}$ la courbe qui représente la fonction sinus.

$M(x\ ;\ \sin(x))$ est le point de la courbe $\mathscr{C}$, d'abscisse x.

$N(-x\ ;\ \sin(-x))$ est le point de la courbe $\mathscr{C}$, d'abscisse $-x$.

On sait d'après le cours de première que pour tout réel x, $\sin(-x) = -\sin(x)$, par conséquent les coordonnées de N sont $N(-x\ ;\ -\sin(x))$.
Donc les points M et N sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

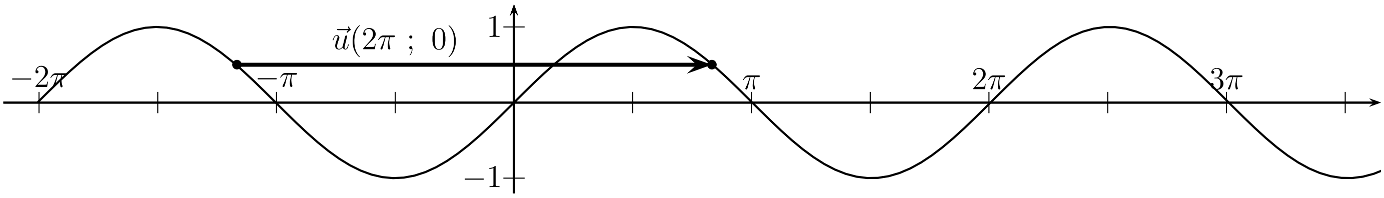


Vocabulaire : une fonction qui a cette propriété s'appelle une **fonction *impaire***.

Propriété 7.4

Si dans un repère du plan on translate la courbe représentative de la fonction sinus par la translation de vecteur $\vec{u}(2\pi\ ;\ 0)$, on obtient alors la même courbe.

Figure



Remarques

- Cette propriété vient du fait que pour tout réel x, $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$.
- On dit que la courbe de la fonction sinus est *invariante* par la translation de vecteur $\vec{u}(2\pi\ ;\ 0)$.
- La propriété ci-dessus reste vraie pour toute translation de vecteur $\vec{u}(2k\pi\ ;\ 0)$ où k est un entier.
- Une fonction qui a cette propriété s'appelle une **fonction *périodique*** de période 2π.

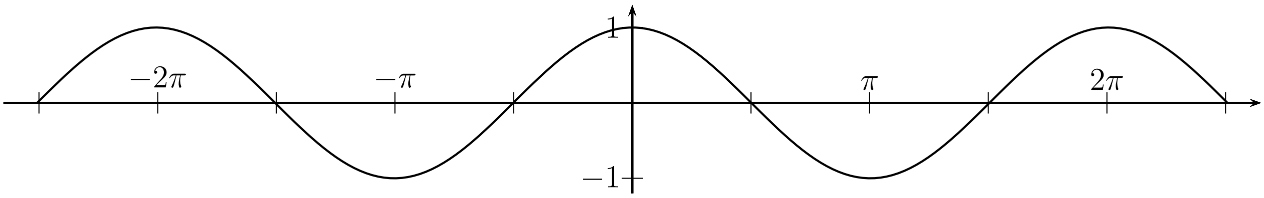
7.3 La fonction cosinus

7.3.a Dérivée de la fonction cosinus

Propriété 7.5

La dérivée de la fonction cosinus est la fonction (− sinus).
Autrement dit pour tout réel x : $\cos'(x)=-\sin(x)$.

7.3.b Représentation graphique de cosinus



Propriété 7.6

La courbe représentative de la fonction cosinus dans un repère du plan est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées de ce repère.

Démonstration et figure

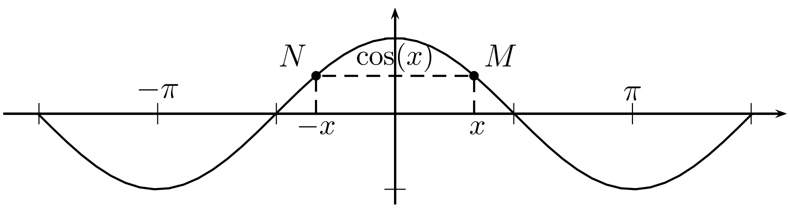
Appelons $\mathscr{C}$ la courbe qui représente la fonction cosinus.

$M(x\ ;\ \cos(x))$ est le point de la courbe $\mathscr{C}$, d'abscisse x.

$N(-x\ ;\ \cos(-x))$ est le point de la courbe $\mathscr{C}$, d'abscisse $-x$.

On sait d'après le cours de première que pour tout réel x, $\cos(-x)=\cos(x)$, par conséquent les coordonnées de N sont $N(-x\ ;\ \cos(x))$.

Donc les points M et N sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées de ce repère.

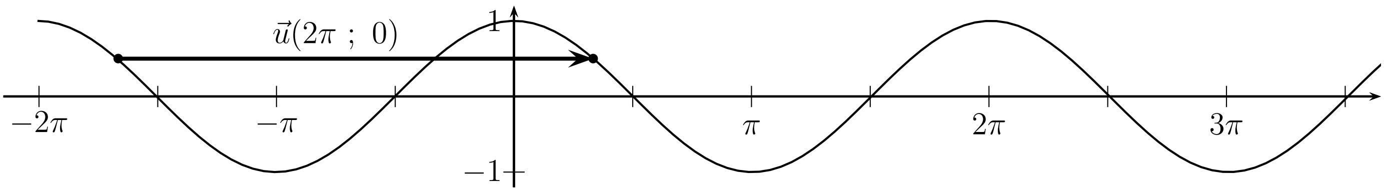


Vocabulaire : une fonction qui a cette propriété s'appelle une **fonction *paire***.

Propriété 7.7

Si dans un repère du plan on translate la courbe représentative de la fonction cosinus par la translation de vecteur $\vec{u}(2\pi\ ;\ 0)$, on obtient alors la même courbe.

Figure



Remarques

- Cette propriété vient du fait que pour tout réel x, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.
- On dit que la courbe de la fonction cosinus est *invariante* par la translation de vecteur $\vec{u}(2\pi\ ;\ 0)$.
- La propriété ci-dessus reste vraie pour toute translation de vecteur $\vec{u}(2k\pi\ ;\ 0)$ où k est un entier.
- Autrement dit la fonction cosinus, comme la fonction sinus, est *périodique* de période 2π.

7.4 Dérivée de $\cos(u)$ et de $\sin(u)$

Propriété 7.8

Si la fonction u est dérivable sur un intervalle I, alors les fonctions $\cos(u)$ et $\sin(u)$ sont dérivables sur I, et on a : $(\cos(u))' = -u' \sin(u)$ et $(\sin(u))' = u' \cos(u)$.

7.5 Utilisation de la calculatrice

Il est indiqué ci-dessous comment régler sa calculatrice en radians ou en degrés, et, pour les courbes de fonctions trigonométriques, comment obtenir le zoom trigonométrique.

TI 82

- Réglage en radians ou en degrés : touche mode.
- Zoom trigonométrique, qui permet d'obtenir un repère orthonormé sur $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$: zoom `7 ZTrig`,

CASIO

- Réglage en radians : SHIFT [SET UP], `Angle : Rad` (F2).
- Zoom trigonométrique qui permet d'obtenir un repère non orthonormé sur $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$: MENU GRAPH, puis SHIFT [V-Window], et, dans la fenêtre, on peut choisir F2 (`TRIG`).

7.6 Fonctions paires, impaires, et périodiques

Le programme de terminale S ne prévoit pas de développer ce qui concerne les fonctions paires, impaires, et périodique.

Par conséquent ce paragraphe n'est pas à connaître par cœur.

7.6.a Fonction paire

Définition 7.2 (Fonction paire)

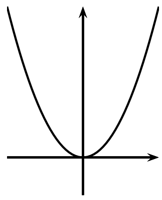
Dire qu'une fonction f est paire signifie que pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$.

Propriété 7.9 (Courbe d'une fonction paire)

La courbe représentative d'une fonction paire dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exemple 7.1 (La fonction carré)

La fonction définie par $f(x) = x^2$ est paire, en effet, pour tout réel x :
$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.
Comme on le voit ci-contre, dans un repère orthogonal, sa courbe représentative est une parabole symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Remarque

On a vu au paragraphe 7.3 que la fonction cosinus est paire, ainsi, l'exemple 7.1 donne un autre exemple de fonction paire.

7.6.b Fonction impaire

Définition 7.3 (Fonction impaire)

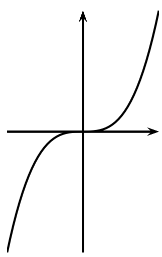
Dire qu'une fonction f est paire signifie que pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$.

Propriété 7.10 (Courbe d'une fonction impaire)

La courbe représentative d'une fonction paire dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'origine de ce repère.

Exemple 7.2 (La fonction cube)

La fonction définie par $f(x) = x^3$ est impaire, en effet, pour tout réel x :
$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.
Comme on le voit ci-contre, dans un repère orthogonal, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Remarque

On a vu au paragraphe 7.2 que la fonction sinus est impaire, ainsi, l'exemple 7.2 donne un autre exemple de fonction impaire.

7.6.c Fonction périodique

Propriété 7.11 (Fonction périodique)

Si une fonction f est périodique de période T alors pour tout réel x, $f(x+T)=f(x)$.

Propriété 7.12 (Courbe d'une fonction périodique)

Si dans un repère du plan on translate la courbe représentative d'une fonction de période T par la translation de vecteur $\vec{u}(T\ ;\ 0)$, on obtient alors la même courbe.

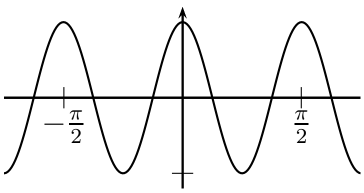
Exemple 7.3

La fonction définie par $f(x)=\cos(4x)$ est périodique, de période $\dfrac{\pi}{2}$, en effet, pour tout réel x :

$f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left(4\times\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)=\cos\left(4\times x+4\times\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos(4x+2\pi)$.

Or, $\cos(\alpha+2\pi)=\cos(\alpha)$.

On a donc : $f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos(4x+2\pi)=\cos(4x)=f(x)$.



Chapitre 8

Droites et plans dans l'espace

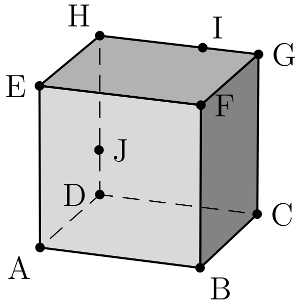
I Exercices

8.1 Positions relatives de droites et de plans

Exercice 8.1

ABCDEFGH est un cube. Le point I est sur l'arête [HG]. Le point J est un point de la face ABFE.

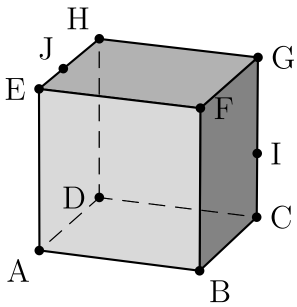
1. Le point I appartient-il au plan (CGH) ?
2. Le point B appartient-il au plan (ADH) ?
3. Les points D et H sont-ils coplanaires ?
4. Les points A, E, I sont-ils coplanaires ?
5. Les points A, B, C, G sont-ils coplanaires ?
6. Les points C, H , I, G sont-ils coplanaires ?
7. Les points D, J, H sont-ils alignés ?



Exercice 8.2

ABCDEFGH est un cube. Le point I est sur l'arête [CG] et le point J est sur l'arête [EH]. Préciser en justifiant la position relative

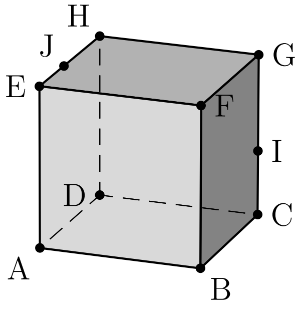
1. de la droite (DJ) et du plan (DHE) ;
2. de la droite (CE) et du plan (CDH) ;
3. de la droite (FG) et du plan (ABC) ;



Exercice 8.3

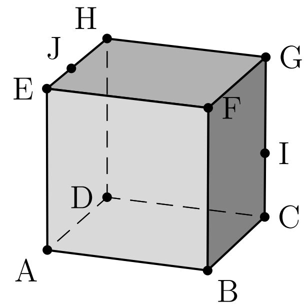
ABCDEFGH est un cube. Le point I est sur l'arête [CG]. le point J est sur l'arête [EH]. Préciser en justifiant la position relative

1. des plans (AEH) et (BCG) ;
2. des plans (ABC) et (EFB) ;
3. des plans (FGC) et (IBF) ;



Exercice 8.4

ABCDEFGH est un cube. Le point I est sur l'arête [CG]. Le point J est sur l'arête [EH]. En justifiant, préciser la position relative

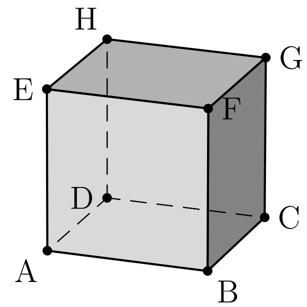


1. des droites (HI) et (GH) ;
2. des droites (CD) et (BF) ;
3. des droites (AD) et (EH) ;
4. des droites (EJ) et (EH).

8.2 Parallélisme dans l'espace

Exercice 8.5

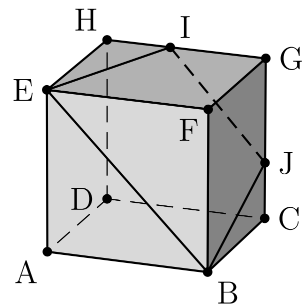
ABCDEFGH est un cube.
Les points I et J sont les milieux respectifs de [EG] et de [FG].



1. Compléter la figure ci-contre.
2. Quelle est la position relative des droites (IJ) et (AB) ? Le démontrer.

Exercice 8.6

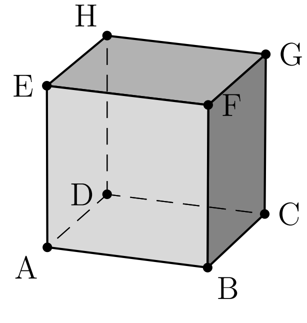
ABCDEFGH est un cube.
Le point I appartient à l'arête [HG]. Le plan (BEI) coupe la droite (GC) en J.



1. Sans justifier, indiquer
   - l'intersection des plans (BEI) et (HGC) ;
   - l'intersection des plans (BEI) et (EFB).
2. Quelle est la position relative des droites (BE) et (IJ) ? Justifier en citant une propriété.
3. On dit que le quadrilatère BEIJ est la section du cube ABCDEFGH par le plan (BEI).
   Quelle est la nature de cette section ?

Exercice 8.7

ABCDEFGH est un cube.
Les points I et J appartiennent respectivement aux arêtes [EH] et [FG].



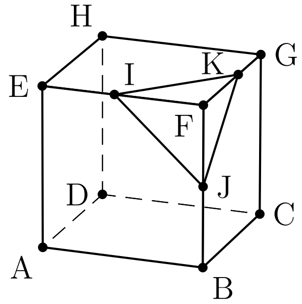
1. Compléter la figure ci-contre.
2. Quelle est la position relative de la droite (IJ) et du plan (EFG) ? Justifier.
3. Quelle est la position relative des plans (EFG) et (ABC) ? Justifier.
4. Quelle est la position relative de la droite (IJ) et du plan (ABC) ? Justifier en citant une propriété.

8.3 Section d'un solide par un plan

Exercice 8.8

ABCDEFGH est un cube. Les points I, J, K appartiennent respectivement aux arêtes [FE], [FB], [FG].
Supposons que le cube soit en bois ou en polystyrène, que l'on coupe le cube selon le plan (IJK), et que l'on enlève la partie coupée.
La section est la figure que l'on voit à l'endroit où on a coupé.

1. Quelle est cette figure ?
2. Colorier ou hachurer cette figure.



Exercice 8.9

Dans chacun des cubes ABCDEFGH ci-dessous, construire la section de ce cube par le plan (IJK), puis colorier ou hachurer cette section.

Fig. 1

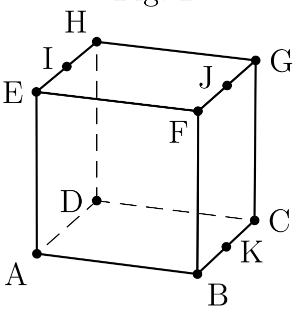


Fig. 2

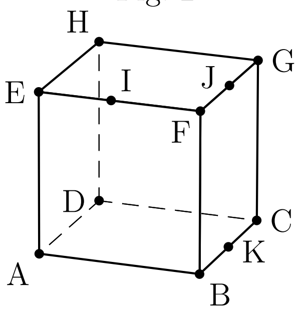
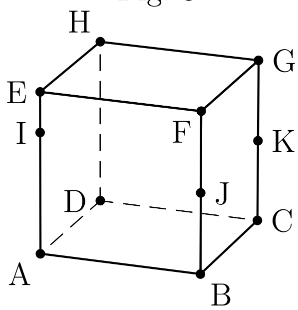


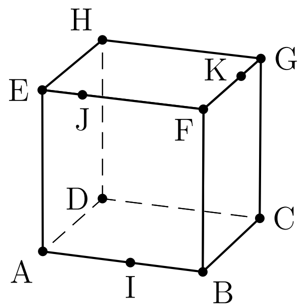
Fig. 3



Exercice 8.10

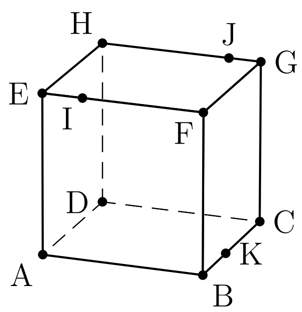
ABCDEFGH est un cube. Les points I, J, K appartiennent respectivement aux arêtes [AB], [EF], [FG].
Construire la section de ce cube par le plan (IJK), puis colorier ou hachurer cette section.
Indications :

- le plan (IJK) coupe le plan (ABC) selon une droite (Δ) ;
- que sait-on des droites (JK) et (Δ) ?



Exercice 8.11

ABCDEFGH est un cube. Les points I, J, K appartiennent respectivement aux arêtes [EF], [GH], [BC].
Construire la section de ce cube par le plan (IJK), puis colorier ou hachurer cette section.
Indication : la droite (IJ) coupe (FG) en L.



8.4 Orthogonalité dans l'espace

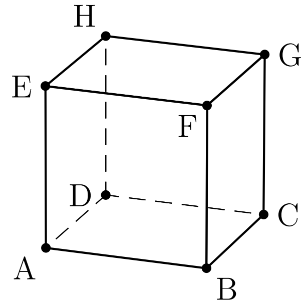
Avant de faire l'exercice ci-dessous, lire la définition de droites orthogonales dans le cours, paragraphe 8.4, définition $\boxed{\text{O1}}$.

Exercice 8.12

Dans le cube ABCDEFGH, déterminons si les droites (AD) et (GH) sont orthogonales.

Pour cela, traçons la parallèle à (AD) et la parallèle à (GH) passant par A, et vérifions si les droites obtenues sont perpendiculaires ou non.

1. La parallèle à (AD) passant par A est la droite (AD) elle même. Quelle est la parallèle à (GH) passant A ?
2. Cette dernière droite est-elle perpendiculaire à (AD) ?
3. Les droites (AD) et (GH) sont-elles orthogonales ?

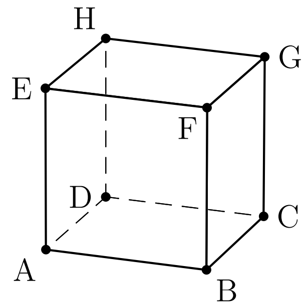


Exercice 8.13

Dans le cube ABCDEFGH ci-contre, justifier chaque fois si les droites indiquées ci-dessous sont orthogonales ou non.
Dans chaque cas :

- indiquer le point choisi et la parallèle à l'une et la parallèle à l'autre qui passent par ce point ;
- vérifier si les droites obtenues sont perpendiculaires ou non ;
- conclure.

1. (EF) et (AD) **2.** (BD) et (EH) **3.** (BC) et (DH)

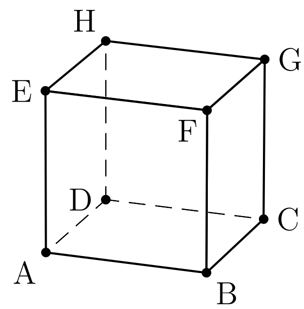


Avant de faire l'exercice ci-dessous, lire les propriétés $\boxed{\text{O2}}$ et $\boxed{\text{O3}}$ dans le cours, paragraphe 8.4.

Exercice 8.14

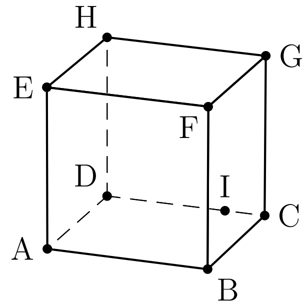
Dans le cube ABCDEFGH, pour justifier que la droite (EH) est orthogonale au plan (DCG), on doit indiquer deux droites du plan (DCG) qui sont orthogonales à la droite (EH).

1. Indiquer deux droites du plan (DCG) qui sont orthogonales à la droite (EH).
2. Les droites (EH) et (HC) sont-elles orthogonales ?



Exercice 8.15

ABCDEFGH est un cube d'arête 4 cm. Le point I est le point de l'arête [CD] tel que DI = 3 cm.



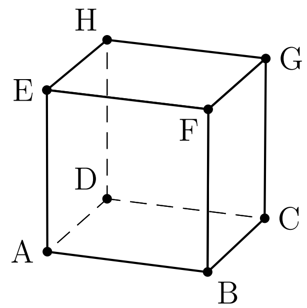
1. Calculer AI en justifiant.

2. Quelle est la nature du triangle EAI ? Justifier.

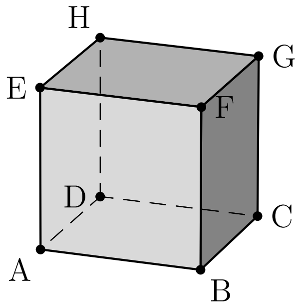
3. Calculer EI. Donner la valeur exacte.

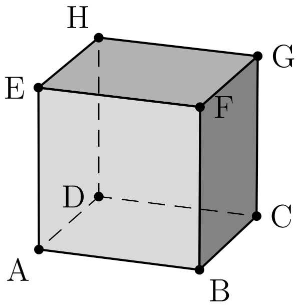
Exercice 8.16

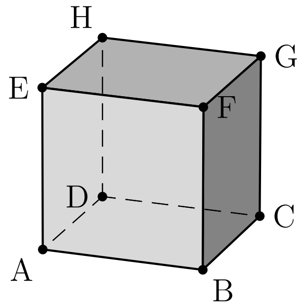
Démontrer que les droites (GH) et (ED) sont orthogonales.
Indication : démontrer d'abord que la droite (GH) est orthogonale au plan (AEH).

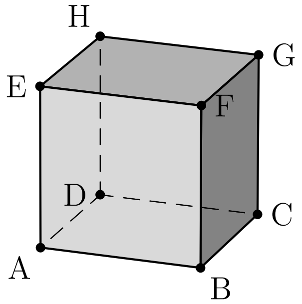


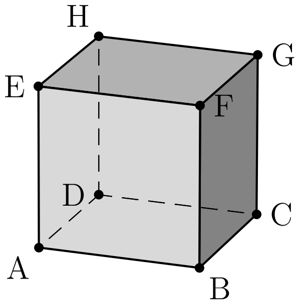
8.5 Annexe : figures pour les exercices

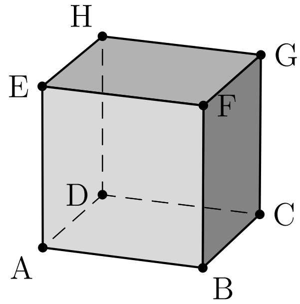


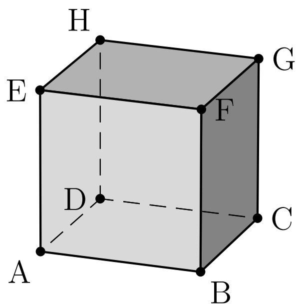


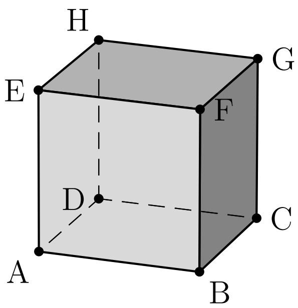


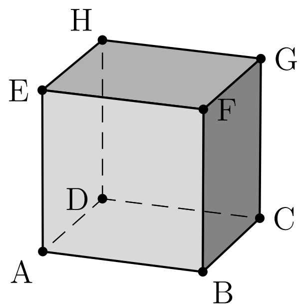


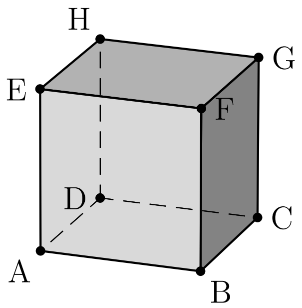


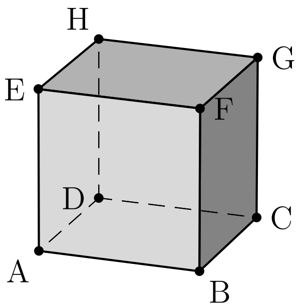


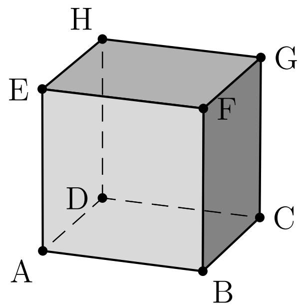












8.6 Pour réviser

Chapitre 10 – Géométrie dans l'espace : droites et plans

Rubrique *Pour s'exercer*, corrigés page 468

- ex 2 p 271, ex 9 p 273 : positions relatives de droites
- ex 10 p 273 : section d'un cube par un plan
- ex 13, 14 p 275 : droites et plans orthogonaux

Les exercices résolus

- ex 1 p 271 : justifier des positions relatives de droites et de plans
- ex 7 p 273 : droites parallèles, parallélogramme, tétraèdre
- ex 8 p 273 : section d'un cube par un plan
- ex 11, 12 p 275 : droites orthogonales

Rubrique *Objectif bac*, corrigés page 476-477

- ex 56, 57, 58 p 281 : QCM et Vrai/Faux
- ex 59 p 282 : volume et fonction, orthocentre d'un triangle
- ex 60, 61, 62 p 283

II Cours

8.1 Rappels de troisième

- La section d'un pavé droit par un plan parallèle à une face ou par un plan parallèle à une arête est un rectangle.
- La section d'un cylindre droit par un plan parallèle à son axe est un rectangle.
- La section d'un cylindre droit par un plan perpendiculaire à son axe est un disque.
- La section d'une pyramide ou d'un cône par un plan parallèle à sa base est une réduction de sa base.
- la section d'une sphère par un plan est un cercle.

8.2 Positions relatives de droites et de plans

Le programme indique qu'un élève doit savoir étudier les positions relatives de droites et de plans.

8.2.a Coplanaire

- C1 « Coplanaire » signifie « contenu dans un même plan ».
- C2 Trois points de l'espace sont toujours coplanaires.
- C3 Une droite et un point de l'espace sont toujours coplanaires.
- C4 Il existe un seul plan qui contienne trois points non alignés.
- C5 Il existe un seul plan qui contienne une droite et un point hors de cette droite.

8.2.b Deux droites dans l'espace

Définitions et propriétés

- DD1 Deux droites sécantes sont deux droites qui ont un seul point d'intersection.
- DD2 Deux droites sécantes sont coplanaires.
- DD3 Deux droites strictement parallèles, sont deux droites coplanaires d'intersection vide.
- DD4 Deux droites parallèles sont deux droites strictement parallèles ou confondues.

Récapitulation

Deux droites d'un plan peuvent être
- coplanaires : dans ce cas elles sont sécantes ou parallèles ;
  si elles sont parallèles, on peut avoir deux cas :
  - les deux droites sont strictement parallèles ;
  - les deux droites sont confondues ;
- non coplanaires.

Méthode

- Pour prouver que deux droites (AB) et (CD) sont coplanaires, on peut chercher à justifier que
  - les droites (AB) et (CD) sont sécantes ;
  - les droites (AB) et (CD) sont parallèles ;
  - un des quatre points A, B, C, D appartient au plan défini par les trois autres.
- Pour prouver que deux droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires, on doit justifier qu'un des quatre points A, B, C, D n'appartient pas au plan défini par les trois autres.

8.2.c Une droite et un plan dans l'espace

Définitions

- DP1 Dire qu'une droite et un plan sont sécants signifie que leur intersection est un point.
- DP2 Dire qu'une droite et un plan sont strictement parallèles signifie que leur intersection est vide.
- DP3 Dire qu'une droite et un plan sont parallèles signifie que cette droite et ce plan sont strictement parallèles, ou que cette droite est incluse dans ce plan.

Récapitulation

Une droite et un plan de l'espace peuvent être sécants ou parallèles.
- S'ils sont sécants, leur intersection est un point.
- S'ils sont parallèles, on peut avoir deux cas :
  - la droite et le plan sont strictement parallèles, alors leur intersection est vide ;
  - la droite est incluse dans le plan.

Propriétés

- DP4 Si deux points distincts sont dans un plan,
  alors la droite passant par ces deux points est incluse dans ce plan.
- DP5 Si une droite passe par un point d'un plan et un point hors de ce plan,
  alors cette droite et ce plan sont sécants.

8.2.d Deux plans dans l'espace

Définitions et propriétés

- PP1 Deux plans sécants sont deux plans qui ont au moins un point en commun et qui ne sont pas confondus.
- PP2 L'intersection de deux plans sécants est une droite.
- PP3 Deux plans strictement parallèles sont deux plans dont l'intersection est vide.
- PP4 Deux plans parallèles sont deux plans strictement parallèles ou confondus.

Récapitulation

Deux plans de l'espace peuvent être sécants ou parallèles.
- S'ils sont sécants, leur intersection est une droite.
- S'ils sont parallèles, ils peuvent être :
  - strictement paralèlles, alors leur intersection est vide ;
  - confondus.

8.3 Parallélisme dans l'espace

Les figures illustrant les propriétés de ce paragraphe se trouvent dans le manuel Hyperbole page 272.

Propriétés – Droites parallèles

- PL1 Si deux droites de l'espace sont parallèles à une même troisième,
  alors ces deux droites sont parallèles entre elles.
- PL2 Si deux droites sont parallèles et si un plan coupe une de ces deux droites,
  alors ce plan coupe l'autre droite.

Propriétés – Droite et plan parallèles

- PL3 Si deux plans sont parallèles et sont coupés par un troisième plan,
  alors les deux droites d'intersection sont parallèles.
- PL4 Si deux plans sont parallèles et si une droite est incluse dans un de ces deux plans,
  alors cette droite est parallèle à l'autre plan.
- PL5 Si une droite (Δ) est parallèle à une droite (d) incluse dans un plan (P),
  alors cette droite (Δ) est parallèle au plan (P).
- PL6 Si un plan contient deux droites sécantes,
  et que ces deux droites sont parallèles à un autre plan,
  alors ces deux plans sont parallèles.

Théorème « du toit »

PL7 Si deux plans (P) et (P') sont sécants selon une droite (Δ),
et si (d) et (d') sont deux droites parallèles contenues respectivement dans (P) et (P'),
alors la droite (Δ) est parallèle à (d) et à (d').

8.4 Orthogonalité dans l'espace

Le programme indique qu'un élève doit savoir établir l'orthogonalité d'une droite et d'un plan.

Les figures illustrant les propriétés de ce paragraphe se trouvent dans le manuel Hyperbole page 274.

Définition – Orthogonalité de deux droites.

O1 Dire que deux droites de l'espace sont orthogonales signifie que la parallèle à l'une et la parallèle à l'autre passant par un même point sont perpendiculaires.

Remarques

- Deux droites perpendiculaires sont donc deux droites sécantes et orthogonales.
- Si deux droites sont perpendiculaires, alors elle sont orthogonales.
- La réciproque est fausse : on peut avoir des droites orthogonales qui ne se coupent pas et ne sont donc pas perpendiculaires.

Définition – Orthogonalité d'une droite et d'un plan

O2 Dire qu'une droite et un plan sont orthogonaux signifie que cette droite est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Propriété

O3 Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan,
alors cette droite est orthogonale à ce plan.

Remarque

Certains livres donnent la propriété ci-dessus comme définition et la définition ci-dessus comme propriété.

Propriété – Une droite et deux plans

- O4 Si deux plans sont orthogonaux à une même droite,
  alors ces deux plans sont parallèles.
- O5 Si deux plans sont parallèles, et si une droite est orthogonale à un de ces deux plans,
  alors cette droite est orthogonale à l'autre plan.

Propriété – Deux droites et un plan

- O6 Si deux droites sont orthogonales à un même plan,
  alors ces deux droites sont parallèles.
- O7 Si deux droites sont parallèles, et si un plan est orthogonal à une de ces deux droites,
  alors ce plan est orthogonal à l'autre droite.

Chapitre 9

Logarithmes

I Exercices

9.1 Définition de la fonction ln et conséquences

Exercice 9.1

Le logarithme népérien d'un nombre réel x est le nombre y tel que $\mathrm{e}^y = x$, autrement dit :
$\ln(x) = y \iff \mathrm{e}^y = x$

1. Faisons un premier essai à la calculatrice (touche $\boxed{\mathsf{ln}}$). On stocke $\ln(5)$ dans A : `ln(5)→A`.
   L'affichage indique que $\ln(5) \approx 1,609$
   Calculer maintenant e^{A}. On doit obtenir 5. On a donc bien : $\ln(5) = \mathrm{A} \iff \mathrm{e}^{\mathrm{A}} = 5$
2. Compléter ce tableau de valeurs à l'aide de la calculatrice
   - s'il y a un message d'erreur, tracer une croix ;
   - arrondir au dixième si nécessaire.

x	-10	-5	0	0,3	0,6	1	2	e	5	10	100	1000
$\ln(x)$												

3. **a)** Expliquer les trois messages d'erreurs obtenus.
   b) Quel est l'ensemble de définition de la fonction ln ? Justifier.
4. Justifier les valeurs de $\ln(1)$ de $\ln(\mathrm{e})$.
5. Conjecturer le signe de $\ln(x)$ selon les valeurs de x.

Exercice 9.2

1. Avec la calculatrice, calculer : (a) $\ln(\mathrm{e}^5)$ (b) $\ln(\mathrm{e}^{-3})$ (c) $\mathrm{e}^{\ln(7)}$ (d) $\mathrm{e}^{\ln(-6)}$
2. **a)** Compléter cette égalité : $\ln(\mathrm{e}^x) = \dots$
   b) Justifier l'égalité précédente.
   c) Cette égalité est-elle vraie pour tout réel x ?
3. Mêmes consignes (a), (b), (c) pour l'égalité $\mathrm{e}^{\ln(x)} = \dots$.

Exercice 9.3

1. Sur l'écran de la calculatrice, tracer la courbe de la fonction ln.
2. Quel est apparemment le sens de variation de la fonction ln ?

3. Justifier la réponse précédente en démontrant que pour tous réel a et b strictement positifs $a < b \iff \ln(a) < \ln(b)$.
Indications :
- poser $c = \ln(a)$ et $d = \ln(b)$;
- écrire a et b en fonction de c et d ;
- utiliser les connaissances sur la fonction exponentielle.

Exercice 9.4

Sur l'écran de la calculatrice, tracer les courbes des fonctions ln et exp et la droite d'équation $y = x$, en choisissant le zoom orthonormal de façon à obtenir un repère orthonormal à l'écran. Que constate-t-on pour ces deux courbes par rapport à cette droite ?

On admettra cette propriété qui est due au fait que $\ln(x) = y \iff \mathrm{e}^y = x$.

Voir le paragraphe 9.1.c du cours.

9.2 Équations et inéquations

Exercice 9.5

Résoudre les équations :

(1) $\ln(x) = -6$ (2) $\ln(x) = 0$ (3) $\ln(x) = 5$ (4) $\mathrm{e}^x = -2$ (5) $\mathrm{e}^x = 0$ (6) $\mathrm{e}^x = 7$

Exercice 9.6

Résoudre les équations :

(1) $\ln(4 - 2x) = 0$ (2) $\mathrm{e}^{5x+2} = 4$ (3) $\ln(3x + 2) = 3$
(4) $\mathrm{e}^{0,1x} = 1,5$ (5) $\mathrm{e}^{x^2} = 1$ (6) $30\mathrm{e}^{-0,05x} = 8$ (7) $5\mathrm{e}^{0,2x} - 6\mathrm{e}^{0,4x} = 0$

Exercice 9.7

Résoudre les inéquations suivantes sur $]0\ ;\ +\infty[$:

(1) $\ln(x) > 0$ (2) $\ln(x) \leqslant 0$ (3) $\ln(x) \geqslant 3$ (4) $\ln(x) < -4$

Exercice 9.8

Résoudre les inéquations suivantes :

(1) $\mathrm{e}^x > 0$ (2) $\mathrm{e}^x \leqslant 0$ (3) $\mathrm{e}^x \leqslant 5$ (4) $\mathrm{e}^x < -6$

9.3 Propriétés algébriques

Exercice 9.9

L'objectif de cet exercice est de démontrer la propriété fondamentale des logarithmes qui dit que pour tous réels a et b strictement positifs $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

1. Étudions un premier exemple à la calculatrice : vérifier que $\ln(6)$ est égal à $\ln(2) + \ln(3)$.

2. Démontrons cette propriété. On pose : $c = \ln(a)$ et $d = \ln(b)$.

a) Démontrer que : $ab = \mathrm{e}^{c+d}$

b) En déduire la propriété.

Exercice 9.10

Écrire les expressions suivantes sous la forme d'un seul logarithme.

1. $\ln(5) + \ln(7)$ **2.** $\ln(60) + \ln(800)$ **3.** $\ln(0,02) + \ln(10)$ **4.** $\ln(3) + \ln\left(\frac{1}{3}\right)$

Exercice 9.11

1. Dans l'exercice précédent, on remarque que $\ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln(3)$.

Démontrer que pour tout réel a strictement positif : $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.

Indication : écrire $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right)$ de deux façons.

2. Démontrer que pour tous réels a et b strictements positifs : $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

Exercice 9.12

1. Démontrer que pour tout réel a strictement positif, et pour tout entier naturel n :
$\ln(a^n) = n\ln(a)$. Indication : par récurrence sur n.

2. Démontrer que pour tout réel a strictement positif : $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

Indication : $\sqrt{a}^2 = a$.

Exercice 9.13

1. Écrire $\ln(9)$ en fonction de $\ln(3)$

2. Écrire $\ln(25) + \ln(5)$ en fonction de $\ln(5)$

3. Écrire $\ln(49)$ en fonction de $\ln(7)$

4. Écrire $\ln(75)$ en fonction de $\ln(3)$ et de $\ln(5)$

5. Écrire $\ln(48)$ en fonction de $\ln(3)$ et de $\ln(2)$.

6. Écrire $\ln(25\sqrt{3})$ en fonction de $\ln(5)$ et de $\ln(3)$.

Exercice 9.14

Écrire sous la forme d'un seul logarithme

1. $\ln(2) + \ln(7)$ **2.** $\ln(7) - \ln(5)$ **3.** $\ln(3) + \ln(11) - \ln(2)$
4. $2\ln(3) + \ln(7)$ **5.** $3\ln(5) - 2\ln(7)$

9.4 Équations $a^x = b$, $x^a = b$ et inéquations

Exercice 9.15

Déterminer chaque fois le plus petit entier n tel que : (1) $1,02^n \geqslant 5$ (2) $0,98^n \leqslant 0,1$

Indication : deux exemples analogues se trouvent dans le cours au paragraphe 9.2.c.

Exercice 9.16

Un capital de 15 000 € est placé à 4,5 % l'an à intérêts composés. À partir de combien d'années ce capital dépasse-t-il 30 000 € ?

Exercice 9.17

Résoudre les équations ci-dessous. Certaines équations ne nécessitent pas les logarithmes. Dans le cours, voir les paragraphes 9.2.c et 9.2.d.

1. $x^5 = 7$ **2.** $(1+t)^6 = 1,3$ **3.** $8\,000 \times (1+t)^{10} = 10\,000$
4. $4^x = 13$ **5.** $0,9^x = 0,5$ **6.** $9\,000 \times 1,02^x = 12\,000$

Exercice 9.18

10 000 € sont placés pendant 8 ans au taux t à intérêts composés et le capital s'élève alors à 15 000 €. Calculer le taux t. On arrondira le nombre t au millième, ainsi le taux t en pourcentage sera arrondi au dixième près.

9.5 Limites

Exercice 9.19

1. Déterminer un réel x tel que $\ln(x) > 10$.
2. Même question pour :
   a) $\ln(x) > 100$ **b)** $\ln(x) > 1\,000$
3. **a)** A est un réel strictement positif. Déterminer x en fonction de A tel que $\ln(x) > A$.
   b) Que venons nous de démontrer en **3. a)** ?

Exercice 9.20

Démontrer la limite de $\ln(x)$ lorsque x est strictement positif et tend vers zéro.

Indication : on pose $x = \dfrac{1}{u}$ et on fait tendre u vers plus l'infini.

Exercice 9.21

Dresser le tableau de variation de la fonction ln sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 9.22

Déterminer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 + \ln(x)\right)$ **2.** $\lim\limits_{\substack{x>0\\x\to0}} \left(1 + \ln(x)\right)$ **3.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left((1+\mathrm{e}^x)\ln(x)\right)$

4. $\lim\limits_{\substack{x>0\\x\to0}} \left((1+x)\ln(x)\right)$ **5.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\left(\ln(x)-5\right)+5\right]$

Exercice 9.23

Déterminer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln\left(1+x^2\right)\right)$ **2.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\ln\left(\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}\right)\right]$ **3.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\ln\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)\right]$

Exercice 9.24

L'objectif de cet exercice est de déterminer et justifier la limite de $\dfrac{\ln(x)}{x}$ *lorsque* x *tend vers* $+\infty$.

1. Pour tout réel x strictement positif, on pose $\ln(x) = y$. Démontrer que : $\dfrac{\ln(x)}{x} = \dfrac{1}{\dfrac{e^y}{y}}$

2. Déterminer et justifier la limite de $\dfrac{\ln(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 9.25

Déterminer les limites suivantes

1. $f(x) = x - \ln(x)$

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \Big(f(x)\Big)$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \Big(f(x)\Big)$ Indication : pour tout réel $x > 0$ mettre x en facteur.

2. $f(x) = x^2 - x + 2\ln(x) + 1$

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \Big(f(x)\Big)$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \Big(f(x)\Big)$ Indication : pour tout réel $x > 0$ mettre x en facteur.

3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\ln(x)}{x^2}\right)$ Indication : écrire $\dfrac{\ln(x)}{x^2}$ sous la forme $\dfrac{\ln(x)}{x} \times \dfrac{1}{x}$.

4. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x+1}$

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \Big(f(x)\Big)$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \Big(f(x)\Big)$ Indication : pour tout réel $x > 0$ mettre x en facteur au dénominateur.

9.6 Dérivée

Exercice 9.26

L'objectif de cet exercice est de déterminer la dérivée de la fonction logarithme népérien.

La fonction f et la fonction u sont définies sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = e^{\ln(x)}$, et $u(x) = \ln(x)$.

1. Simplifier l'écriture de $f(x)$.

2. Calculer la dérivée de f de deux manières différentes.

3. En déduire $u'(x)$.

Exercice 9.27

On sait d'après le cours sur les dérivées que le nombre dérivé d'une fonction f en a est $f'(a)$ et que $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \left(\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}\right)$.

Appliquer cela en remplaçant la fonction f par la fonction ln en remplaçant a par 1, et h par x.

Exercice 9.28

Calculer les dérivées des fonctions définies ci-dessous, définies et dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$.

1. $f(x) = -2x + 7 + \ln(x)$ **2.** $f(x) = x^2 + 3\ln(x)$ **3.** $f(x) = e^x - 5x - 6\ln(x)$

4. $f(x) = (4 - x)\ln(x) + 6$ **5.** $f(x) = \dfrac{3\ln x + 2}{x}$

Avant de faire cet exercice lire la formule de la dérivée de $\ln(u)$ *dans le paragraphe 9.5 du cours.*

Exercice 9.29

Calculer les dérivées des fonctions définies ci-dessous. Chacune des fonctions est définie et dérivable sur l'intervalle I qui est indiqué.

(1) $f(x) = \ln(3x-2)$ $\quad \mathrm{I} = \left]\dfrac{2}{3}\ ;\ +\infty\right[$ (2) $f(x) = \ln(x^2+1)$ $\quad \mathrm{I} = \mathbb{R}$

(3) $f(x) = \ln(x-4)$ $\quad \mathrm{I} =]4\ ;\ +\infty[$ (4) $f(x) = 0,5x^2 - 2x + \ln(x+3) + 1,5$ $\quad \mathrm{I} =]-3\ ;\ +\infty[$

9.7 Études de fonctions

Exercice 9.30

La fonction f est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 2x - 3 - 5\ln(x)$. La fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.

1. **a)** Déterminer la limite en zéro de la fonction f.
   b) Écrire l'expression $f(x)$ sous la forme $x\,g(x)$, c'est à dire mettre x en facteur.
   c) Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f.
2. Calculer la dérivée de la fonction f. Réduire au même dénominateur.
3. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f.
4. Tracer la courbe représentative de la fonction f à la calculatrice.

Exercice 9.31

Soit f la fonction, définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x - 2,5 + \ln(x+1)$.

On admet que la fonction f est continue et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, et on appelle f' sa dérivée.

1. **a)** Calculer $f(0)$.
   b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Pour tout nombre x de $[0\ ;\ +\infty[$, calculer $f'(x)$.
3. Étudier le signe de f' et justifier que f' est strictement positive sur $[0\ ;\ +\infty[$.
4. Dresser le tableau de variation de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
5. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1\ ;\ 2]$.
6. À l'aide de la calculatrice déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Exercice 9.32

La fonction f est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2\big(1+\ln(x)\big)}{x}$.

1. **a)** Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   b) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
   c) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x est positif et tend vers zéro.
   d) En déduire les asymptotes éventuelles.
   e) Pour tout $x > 0$, calculer $f'(x)$.
   f) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
   g) Dresser le tableau de variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2. On considère maintenant que x est le nombre d'objets fabriqués par une entreprise en milliers, et que $f(x)$ est le bénéfice mensuel en milliers d'euros.
Répondre aux questions suivantes en utilisant certains résultats du 1.
 a) Quel nombre minimal d'objets l'entreprise doit-elle vendre mensuellement pour que le bénéfice soit positif ?
 b) Combien faut-il vendre d'objets pour réaliser le bénéfice maximal ?
 c) Quel est le montant de ce bénéfice maximal ?

Exercice 9.33

1. Résoudre l'inéquation $1 - 3\ln(x) \geqslant 0$.

2. La fonction f est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3\ln(x)+2}{x}$.
La fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.
 a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
 b) Calculer la dérivée de la fonction f.
 c) Étudier le signe de la dérivée.
 d) Dresser le tableau de variations de complet de la fonction f.
 e) Tracer la courbe représentative de la fonction f à la calculatrice.

Exercice 9.34

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x + \dfrac{3\ln x}{2x^2}$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f.

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f et la courbe $\mathscr{C}_f$.

Partie A – Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = 6\ln x - 2x^3 - 3$.

On désigne par g' la fonction dérivée de g.

1. Calculer $g'(x)$.

2. On admet que le signe de $g'(x)$ est donné par le tableau ci-dessous. Dresser le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. On ne demande pas les limites dans cette question.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

3. En déduire que $g(x) < 0$ pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$.

Partie B – Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en 0.

2. En déduire une droite asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$. Donner son équation.

3. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
 a) Montrer que, pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = -\dfrac{g(x)}{2x^3}$.
 b) En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie C – Asymptote oblique et courbe

La fonction h est définie par $h(x) = x$ et elle est représentée par la droite (d).

1. Étudier le signe de $f(x) - h(x)$.

2. En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite (d).

3. Déterminer la limite de $f(x) - h(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite (d) lorsque x tend vers $+\infty$?
On dit que la droite (d) est *asymptote oblique* à la courbe $\mathscr{C}_f$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5. Tracer la droite asymptote (d) et la courbe de la fonction f à la calculatrice.

9.8 Logarithmes décimaux

Pour tout nombre x strictement positif, son logarithme décimal est défini par : $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

Exercice 9.41

D'après la définition du logarithme décimal ci-dessus,

1. Déterminer $\log(1)$ et $\log(10)$.

2. Dresser le tableau de variation de la fonction log sur $]0\ ;\ +\infty[$.

3. Dresser le tableau de signes de la fonction log sur $]0\ ;\ +\infty[$.

4. Démontrer que pour tous réels $x > 0$ et pour tout réel y : $\log(x) = y \iff 10^y = x$

5. Démontrer que pour tous réels a et b strictement positifs, $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$.

Exercice 9.42

Résoudre les équations ci-dessous.

1. $\log(x) = -5$ **2.** $\log(x) = 0$ **3.** $\log(x) = 1$ **4.** $\log(x) = 7$

Exercice 9.43

Effectuer les calculs ci-dessous en utilisant les propriétés. Arrondir au centième près.

1. $\log(2,15 \times 10^8)$ **2.** $\log(3,7 \times 10^{-6})$

Exercice 9.44

1. Calculer à la calculatrice les logarithmes décimaux de 1 234, de 123 456, et de 123 456 789.

2. D'après ces résultats, conjecturer comment on obtient le nombre de chiffres d'un nombre d'après son logarithme décimal.

3. Déterminer le nombre de chiffres de 2^{500}.

Exercice 9.45 (Le pH en chimie)

Le pH d'une solution est donné par la formule : $\text{pH} = -\log[H_3O^+]$ où $[H_3O^+]$ désigne la concentration de la solution en ions H_3O^+, c'est à dire le nombre de moles par litre de l'ion H_3O^+.

1. Calculer le pH d'une eau savonneuse dont la concentration en ions H_3O^+ est 5×10^{-10}.

2. Calculer la concentration en ions H_3O^+ des solutions suivantes

a) eau pure de pH 7

b) soda de pH 2,6

c) eau de mer de pH 8

3. Si la concentration en ions H_3O^+ d'une solution est multipliée par 10 000, quelle variation de pH cela produit-il ?
Indication : on appelle C la concentration de la solution de départ, donc $pH = -\log(C)$. Écrire alors le pH de la 2e solution en fonction de C.

Exercice 9.46 (Intensité et niveau sonore, décibels)

L'intensité sonore est exprimée en Watts par m^2 et elle est notée I.

La plus faible intensité sonore perceptible par l'oreille humaine est $I_0 \approx 10^{-12}$ W m^{-2}.

L'intensité sonore moyenne dans une salle de classe est $I_c \approx 10^{-6}$ W m^{-2}.

On définit le niveau sonore N en décibels (dB) ainsi : $N = 10 \log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$

1. Calculer le niveau sonore en dB correspondant à chacune des intensités I_0 et I_c.

2. Le bruit augmente dans la classe et l'intensité sonore est doublée.
Calculer le nouveau niveau sonore en dB.

3. Lors d'un concert piano-voix, le niveau sonore du piano seul est 72 décibels et celui du chanteur seul est 68 décibels.

a) Calculer les intensités sonores I_1 et I_2 pour le piano et pour le chanteur.

b) Les intensités sonores s'ajoutent. Calculer le niveau sonore correspondant à l'intensité sonore $I_1 + I_2$.

Exercice 9.47 (Magnitude d'un séisme)

La magnitude d'un séisme est donnée par l'égalité : $M = \dfrac{2}{3}\log(E) - 6$ où E est l'énergie du séisme exprimée en Joules.

L'énergie E est liée à la rigidité du milieu (eau, roche, sable, terre), aux dimensions de la faille (longueur et profondeur) et au déplacement horizontaux et verticaux sur la faille.

1. En Haïti, en janvier 2010, a eu lieu un tremblement de terre de magnitude $M = 7$. Calculer l'énergie E de ce séisme, en Joules, en écriture scientifique arrondie au centième.

2. Un mois plus tard, au Chili, s'est déroulé un séisme d'une énergie E' 500 fois plus importante. Calculer sa magnitude M'. Arrondir au dixième près.

3. Si la magnitude entre deux séismes augmente de 1, par quel coefficient est multiplié l'énergie ? Arrondir au dixième près.
Indication : on appelle M_1 et M_2 les deux magnitudes, et E_1, E_2 les deux énergies. Écrire $M_2 - M_1$ en fonction de E_1 et E_2, puis chercher à calculer $\dfrac{E_2}{E_1}$.

Exercice 9.48 (Gain en tension, en décibels)

Dans un amplificateur sonore, un élément appelé quadripôle modifie la tension électrique. On appelle U_e la tension électrique en entrée et U_s la tension électrique en sortie. On définit alors le gain en tension par l'égalité : $G_U = 20 \log\left(\dfrac{U_s}{U_e}\right)$. Ce gain s'exprime en décibels.

1. Si un quadripôle multiplie la tension par 10, quel est son gain en tension ?

2. Que signifie qu'un gain en tension est négatif ?

3. Si le gain en tension est 6 dB, par quel coefficient est multipliée la tension ?
Indication : calculer $\dfrac{U_s}{U_e}$ et arrondir à l'unité.

Exercice 9.49 (Calcul d'un grand nombre)

Dans un exercice précédent on s'était rendu compte que le nombre $\alpha = \mathrm{e}^{1000}$ dépassait la capacité de la calculatrice.

Nous allons utiliser les logarithmes décimaux pour en calculer une valeur approchée en notation scientifique.

1. Calculer $\log(\alpha)$ au millième près.
2. Calculer α en notation scientifique au centième près.

9.9 Pour réviser

Chapitre 6 – Fonction logarithme népérien

Les exercices résolus

- ex 1 et 2 p 149 : équations, inéquations
- ex 7 p 151 : utilisation des règles de calcul
- ex 8 p 151 : inéquation $q^n \geqslant k$
- ex 13 p 153 : équation d'une tangente
- ex 14 p 153 : position de la courbe de ln par rapport à ses tangentes.
- ex 19 p 155 : limites
- ex 20 p 155 : déterminer un maximum

Rubrique *Pour s'exercer*, corrigés page 465

- ex 2 et 5 p 149 : équations, inéquations
- ex 9 p 151 : utilisation des règles de calcul
- ex 12 p 151 : résoudre une inéquation de suite avec logarithme
- ex 15 et 17 p 153 : fonctions, positions relatives de courbes et de droites
- ex 21 p 155 : limites
- ex 25 p 155 : minimum d'une fonction

Rubrique *Objectif bac*, corrigés page 473-474

- ex 125 p 163 : QCM
- ex 126, 127 p 163 : Vrai/Faux
- ex 128 p 164 : problème de type bac, optimisation (recherche d'une distance minimale)
- ex 129 p 165 : algorithmique
- ex 130 p 165 : suite et fonction

II Cours

9.1 La fonction ln

9.1.a Définition et conséquences

Définition 9.1

Le logarithme népérien d'un nombre réel x, que l'on écrit $\ln(x)$, est le nombre y tel que $e^y = x$, autrement dit : $\ln(x) = y \iff e^y = x$

Étudions les conséquences immédiates de la définition.

On sait que pour un réel x, $\ln(x) = y \iff e^y = x$, or on sait aussi que $e^y > 0$, par conséquent $x > 0$, d'où la propriété ci-dessous.

Propriété 9.1 (Ensemble de définition de ln)

L'ensemble de définition de la fonction ln est $]0\ ;\ +\infty[$.

Déterminons à présent les valeurs de $\ln(1)$ et de $\ln(e)$:

$\ln(1) = y \iff e^y = 1$, or $1 = e^0$, donc : $\ln(1) = y \iff e^y = e^0 \iff y = 0$, donc $\ln(1) = 0$.

$\ln(e) = y \iff e^y = e$, or $e = e^1$, donc : $\ln(1) = y \iff e^y = e^1 \iff y = 1$, donc $\ln(e) = 1$.

On retiendra la propriété ci-dessous.

Propriété 9.2 (Deux valeurs remarquables)

$\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$

Étudions maintenant les expressions $\ln(e^x)$ et $e^{\ln(x)}$.

Pour tout réel x, $e^x = y \iff x = \ln(y) = \ln(e^x)$ donc, pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$

Pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) = y \iff x = e^y = e^{\ln(x)}$ donc, pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$

On retiendra la propriété ci-dessous.

Propriété 9.3

Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$ et pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$.

Propriété 9.4

Pour tous nombres a et b strictement positifs, $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$.

Démonstration

Si $a = b$, il est bien évident qu'alors $\ln(a) = \ln(b)$.

Réciproquement, si $\ln a = \ln b$, alors $e^{\ln(a)} = e^{\ln(b)}$, c'est à dire $a = b$.

9.1.b Variations de la fonction ln

Propriété 9.5

Pour tous nombres a et b strictement positifs, $a < b \iff \ln(a) < \ln(b)$.

Démonstration

Démontrons que pour tous réel a et b strictement positifs : $a < b \iff \ln(a) < \ln(b)$.

Posons : $c = \ln(a)$ et $d = \ln(b)$, alors $a = \mathrm{e}^c$ et $b = \mathrm{e}^d$, par conséquent $a < b \iff \mathrm{e}^c < \mathrm{e}^d$.

Or la fonction exponentielle est strictement croissante, donc : $\mathrm{e}^c < \mathrm{e}^d \iff c < d$

Or $c = \ln(a)$ et $d = \ln(b)$, donc : $c < d \iff \ln(a) < \ln(b)$.

Nous venons donc de démontrer que la fonction ln est strictement croissante.

Propriété 9.6

La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Puisque la fonction ln est strictement croissante, on en déduit que si $x < 1$, alors $\ln x < \ln 0$, et que si $x > 1$ alors $\ln x > \ln 0$, or $\ln 0 = 1$, d'où la propriété ci-dessous.

Propriété 9.7

- Si x est strictement compris entre 0 et 1 alors $\ln x$ est strictement négatif.
- Si x est strictement supérieur à 1 alors $\ln x$ est strictement positif.

9.1.c Courbes des fonction ln et exp

On considère les courbes des fonction ln et exp dans un repère orthonormé.

Nous avons défini la fonction ln en indiquant que pour tous réel x :
$\ln(x) = y \iff \mathrm{e}^y = x$.

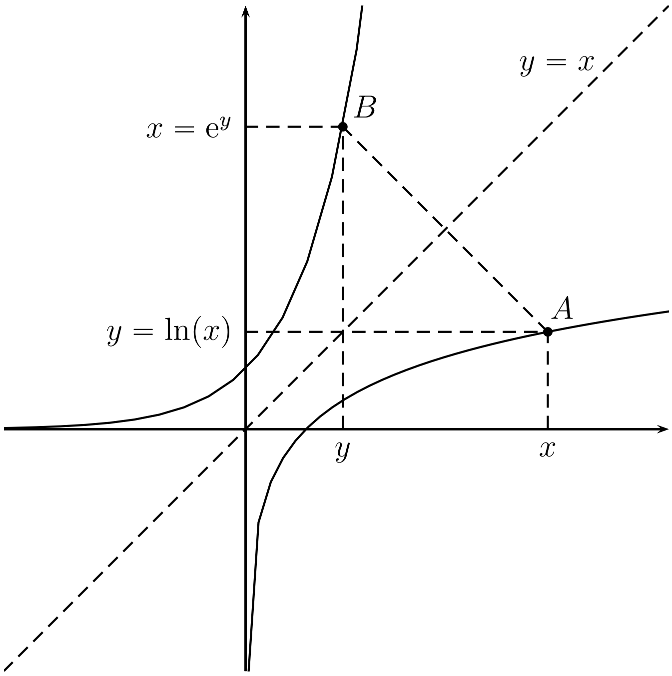
Appelons A et B les points de coordonnées respectives $A\ (x\ ;\ y)$ et $B\ (y\ ;\ x)$.

Le point A appartient à la courbe de la fonction ln parce que : $y = \ln(x)$.

Le point B appartient à la courbe de la fonction exp parce que : $x = \mathrm{e}^y$.

Or, les points de coordonnées respectives $(x\ ;\ y)$ et $(y\ ;\ x)$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

On en déduit la propriété ci-dessous.



Propriété 9.8

Les courbes représentatives des fonctions logarithme népérien et exponentielle dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Remarque : cette propriété est vraie dans un repère orthonormé pour les courbes de deux fonctions réciproques, par exemple la fonction carré définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ et la fonction racine carrée définie sur $[0\ ;\ +\infty[$. Le sujet des fonctions réciproques ne sera pas étudié en terminale S.

9.1.d Équations $\ln(x) = a$ et $e^x = a$.

Une autre conséquence de la définition est la résolution des équations $\ln(x) = a$ et $e^x = a$.

Pour tout réel a : $\ln(x) = a \iff x = e^a$.

En revanche l'équation $e^x = a$ n'a pas de solution si $a < 0$, et pour tout réel $a > 0$:
$e^x = a \iff x = \ln(a)$.

Propriété 9.9

Pour tout réel a, l'équation $\ln(x) = a$ admet une unique solution qui est $x = e^a$.

Propriété 9.10

- Pour tout réel $a \leqslant 0$, l'équation $e^x = a$ n'admet pas de solution.
- Pour tout réel $a > 0$, l'équation $e^x = a$ admet une unique solution qui est $x = \ln(a)$.

9.2 Propriétés algébriques

9.2.a Propriété fondamentale

Propriété 9.11

Pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

Démonstration

Posons : $c = \ln(a)$ et $d = \ln(b)$ et démontrons que : $ab = e^{c+d}$.

Nous savons que : $c = \ln(a) \iff e^c = a$ et $d = \ln(b) \iff e^d = b$

Par conséquent : $ab = e^c \times e^d = e^{c+d}$

Mais nous savons que : $ab = e^{c+d} \iff \ln(ab) = c + d$

or $c = \ln(a)$ et $d = \ln(b)$, donc : $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

9.2.b Conséquences de la propriété fondamentale

Propriété 9.12

Pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln(b)$ et $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

Démonstration

D'une part : $\ln\left(a \times \dfrac{1}{a}\right) = \ln(1) = 0$ et d'autre part : $\ln\left(a \times \dfrac{1}{a}\right) = \ln(a) + \ln\left(\dfrac{1}{a}\right)$.

Donc : $\ln(a) + \ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = 0$, par conséquent : $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.

Démontrons maintenant la deuxième égalité.

$\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \dfrac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

Propriété 9.13

Pour tout réel a strictement positif et pour tout réel b,
$\ln(a^b) = b \times \ln(a)$ et $\ln(\sqrt{a}\,) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$

Démonstration de la première égalité lorsque b est un entier naturel

Initialisation : $\ln(a^0) = \ln(1) = 0$ et $0 \times \ln(a) = 0$, donc $\ln(a^0) = 0 \times \ln(a)$.

Hérédité : supposons que $\ln(a^n) = n\ln(a)$

$\ln(a^{n+1}) = \ln(a^n \times a) = \ln(a^n) + \ln(a) = n\ln(a) + \ln(a) = (n+1)\ln(a)$

On admet que l'égalité $\ln(a^b) = b \times \ln(a)$ est encore vraie si b est un réel.

Démonstration de la deuxième égalité

On sait que tout réel a strictement positif : $\sqrt{a}^2 = a$

Donc $\ln\left(\sqrt{a}^2\right) = \ln(a)$ d'autre part : $\ln\left(\sqrt{a}^2\right) = 2 \times \ln\left(\sqrt{a}\right)$

Donc $\ln(a) = 2 \times \ln\left(\sqrt{a}\right)$ donc $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$.

9.2.c Inéquations $a^n < b$

On rencontre des situations analogues aux exemples ci-dessous à propos de suites géométriques.

Exemples

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

a) $1,05^n \geqslant 2$ **b)** $0,95^n \leqslant 0,2$

$$\begin{aligned}
1,05^n &\geqslant 2 \\
\ln(1,05^n) &\geqslant \ln(2) \\
n \times \ln(1,05) &\geqslant \ln(2) \\
n &\geqslant \frac{\ln(2)}{\ln(1,05)} \quad (1) \\
n &\geqslant 14,2 \\
n &\geqslant 15
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
0,95^n &\leqslant 0,2 \\
\ln(0,95^n) &\leqslant \ln(0,2) \\
n \times \ln(0,95) &\leqslant \ln(0,2) \\
n &\geqslant \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,95)} \quad (2) \\
n &\geqslant 31,3 \\
n &\geqslant 32
\end{aligned}$$

Remarques :

(1) On a divisé par $\ln(1,05)$ qui est positif parce que $1,05 > 1$, donc l'inégalité ne change pas de sens.

(2) On a divisé par $\ln(0,95)$ qui est négatif parce que $0,95 < 1$, donc l'inégalité change de sens.

9.2.d Équations $x^a = b$

Propriété 9.14

Pour un réel a et deux réels b et x strictement positifs, $x^a = b \iff x = b^{\frac{1}{a}}$

9.3 Limites

Propriété 9.15 (Limites de ln en zéro et $+\infty$)

- La limite de $\ln x$ lorsque x tend vers $+\infty$ est $+\infty$.
- La limite de $\ln x$ lorsque x est strictement positif et tend vers zéro est $-\infty$.

La limite en zéro a pour conséquence la propriété ci-dessous.

Propriété 9.16

La représentation graphique de la fonction ln a une asymptote verticale qui est la droite d'équation $x = 0$, c'est à dire l'axe des ordonnées.

Deux autres limites sont à connaître.

Par quotient de limites lorsque x tend vers $+\infty$, le quotient $\dfrac{\ln(x)}{x}$ donne une forme indéterminée.

On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$. Cela signifie intuitivement que lorsque x tend vers $+\infty$, $\ln(x)$ tend vers $+\infty$ « plus lentement que x », et on parle alors de *croissances comparées.*

D'autre part, on admet que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Propriété 9.17 (Autres limites à connaître)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

9.4 Tableau de variations de ln

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Remarque

Nous avons dressé le tableau de variations de la fonction ln sans avoir étudié sa dérivée et son signe. Cela est dû au fait que nous avons justifié que la fonction ln est strictement croissante à partir de sa fonction réciproque, la fonction exponentielle.

9.5 Dérivée de ln et de ln(u)

On admet que la fonction ln est dérivable, déterminons sa dérivée.

On définit la fonction f et la fonction u sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{\ln(x)}$, et $u(x) = \ln(x)$.

Simplifions l'écriture de $f(x)$: on sait que pour tout réel $x > 0$, $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$, soit $f(x) = x$

Calculons la dérivée de f de deux manières différentes.

1re manière : $f(x) = x$ donc $f'(x) = 1$

2e manière : $f(x) = \mathrm{e}^{\ln(x)}$ et $u(x) = \ln(x)$ or $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$

donc $f'(x) = u'(x) \times \mathrm{e}^{\ln(x)} = u'(x) \times x$

De ces deux calculs, on déduit que pour tout réel $x > 0$, $u'(x) \times x = 1$, et par conséquent $u'(x) = \dfrac{1}{x}$.

On obtient ainsi la propriété suivante.

Propriété 9.18

La fonction ln est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sa dérivée est la fonction inverse.
Autrement dit, pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

On admettra la propriété suivante.

Propriété 9.19

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que pour tout nombre x de l'intervalle I $u(x) > 0$, alors la fonction $\ln u$ est dérivable et : $\big(\ln(u)\big)' = \dfrac{u'}{u}$.

9.6 Logarithme décimal

Propriété 9.20

Pour tout nombre x strictement positif, $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Conséquence : $\boxed{\log(1) = 0 \ \text{ et } \ \log(10) = 1}$

Propriété 9.21

Pour tous réels $x > 0$ et pour tout réel y : $\log(x) = y \iff 10^y = x$

Le logarithme décimal a les mêmes propriétés algébriques que le logarithme népérien.
On a donc les propriétés ci-dessous.

Propriété 9.22

Pour tous réels a et b strictement positifs,

$\log(ab) = \log(a) + \log(b) \qquad \log\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\log(a) \qquad \log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$

Pour tous réels $a > 0$ et pour tout réel b : $\log(a^b) = b\log(a)$

Utilisation de la calculatrice

Sur la calculatrice la touche du logarithme décimal est la touche $\boxed{\mathsf{log}}$.

Chapitre 10

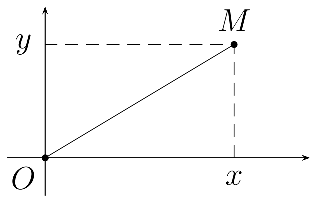
Compléments sur les complexes

I Exercices

10.1 Module et arguments

Exercice 10.1 (Module d'un complexe)
Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$ un point M a pour affixe $z = x+y\mathrm{i}$.
Écire l'expression de la distance OM en fonction de x et y.

On appelle **module de** z cette distance et on la note $|z|$.



Exercice 10.2
Calculer les modules des complexes suivants (valeurs exactes) :

$z_1 = 3 + 4\mathrm{i} \qquad z_2 = 6 - \mathrm{i} \qquad z_3 = -7 \qquad z_4 = \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

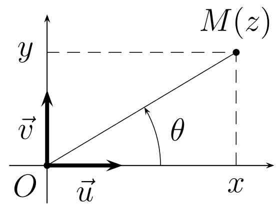
Exercice 10.3
On considère le complexe $z = x + y\,\mathrm{i}$.

1. Calculer le produit $z\overline{z}$.
2. Que constate-t-on ?

Exercice 10.4 (Forme trigonométrique d'un complexe)
Le plan complexe est rapporté à un repère orthormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$. Le point M a pour affixe $z = x + y\mathrm{i}$ et θ est une mesure de l'angle $(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OM})$.

Consigne : écrire z en fonction de $|z|$, de $\cos\theta$, et de $\sin\theta$.

Indication : quelques vieux souvenirs de collège . . .



- L'expression obtenue s'appelle la **forme trigonométrique** d'un nombre complexe.
- θ s'appelle un **argument** du nombre complexe z.

COURS : *avant de passer aux exercices suivants, lire le paragraphe 10.1 jusqu'à la définition 10.3. à propos de* ***module, argument, forme trigonométrique****.*

Exercice 10.5

Le programme indique qu'un élève doit savoir passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement.

Transformer sous la forme trigonométrique le nombre complexe : $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

La méthode et un exemple sont donnés dans le cours juste après la définition 10.3 page 171.

Exercice 10.6

Transformer sous la forme trigonométrique le nombre complexe : $z = -2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$.

Exercice 10.7

On considère le nombre complexe : $z = -4 + 4\mathrm{i}$.

1. Tracer un repère et placer le point M d'affixe z. Cela facilitera la détermination d'un argument de z.
2. Voici maintenant des indications pour transformer z sous la forme trigonométrique.
   a) Justifier par un calcul que $|z| = 4\sqrt{2}$.
   b) Justifier ensuite par des calculs que $z = 4\sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
   c) Justifier enfin que $z = 4\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
   d) Écrire z sous la forme trigonométrique.

Exercice 10.8

Transformer sous la forme trigonométrique les nombres complexes ci-dessous.

Pour les questions 2 à 6 tracer un repère et placer les points des affixes indiqués.

1. $z = 4\sqrt{3} + 4\mathrm{i}$. **2.** $z = 5$ **3.** $z = -7$ **4.** $z = 4\mathrm{i}$ **5.** $z = -3\mathrm{i}$ **6.** $z = 5 - 5\mathrm{i}$

Exercice 10.9

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes ci-dessous.

1. $4\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ **2.** $7\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$ **3.** $2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$

4. $3(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi)$ **5.** $6\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$

10.2 Module, arguments et géométrie

Exercice 10.10

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.

A et B sont les points d'affixes respectifs $z_A = 1 + 3\mathrm{i}$ et $z_B = 3 + 5\mathrm{i}$.

1. Tracer la figure.
2. Déterminer le module (sous la forme $a\sqrt{2}$) et un argument de $z_B - z_A$.
3. Préciser ce que représentent les deux résultats précédents sur la figure.
4. Compléter la figure pour faire apparaître l'argument trouvé en 2.

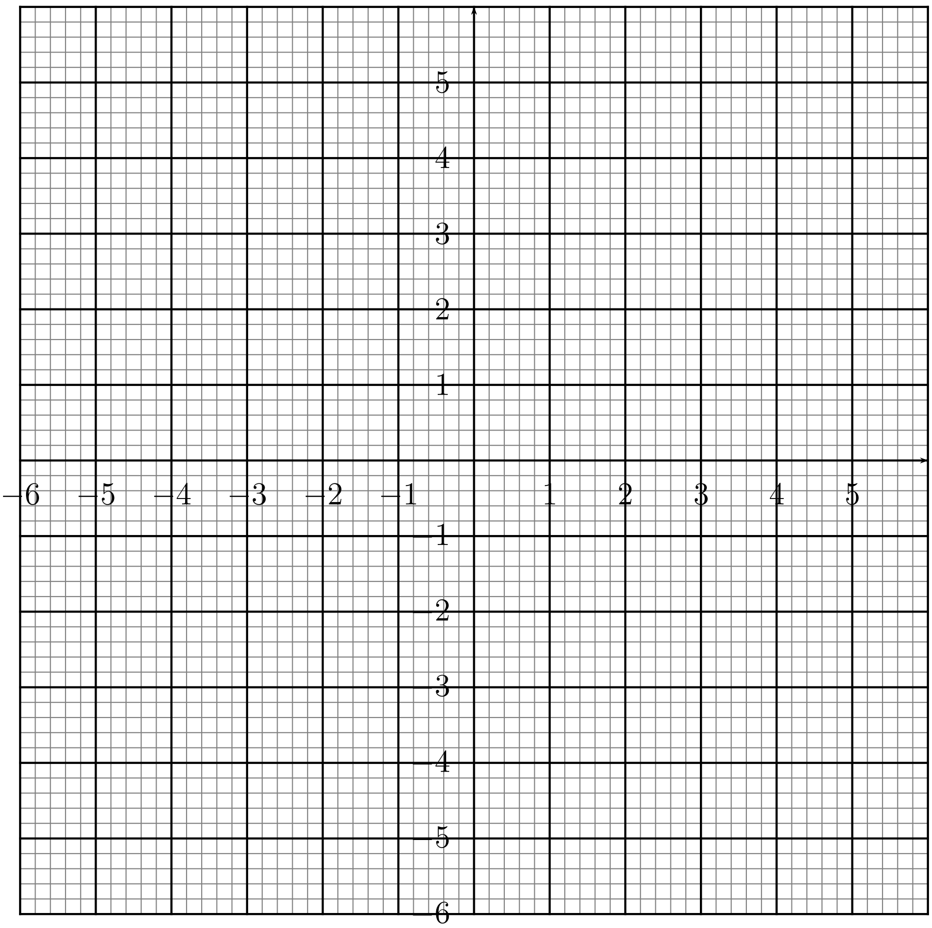
COURS : *paragraphe 10.4*

Exercice 10.11

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.

A et B sont les points d'affixes respectifs $z_A = 2\sqrt{3} + 2\text{i}$ et $z_B = 3 - 3\text{i}\sqrt{3}$.

1. Déterminer le module et l'argument de z_A et de z_B.
2. Tracer la figure dans le repère ci-dessous.
   On placera approximativement A et B en arrondissant $2\sqrt{3}$ et $3\sqrt{3}$ au dixième.
3. Calculer l'angle orienté de vecteurs $\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}\right)$ et en déduire la nature du triangle OAB.



Exercice 10.12

1. Tracer un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.
2. Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z_M qui vérifient la propriété indiquée.
   Tracer tous ces ensembles de points dans ce même repère.

   a) $|z_M| = 3$ **b)** $|z_M| \leqslant 2$ **c)** $\arg(z_M) = \dfrac{\pi}{4}$ **d)** $\arg(z_M) = -\dfrac{\pi}{4}$ et $|z_M| \leqslant 5$.

Exercice 10.13

1. Tracer un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.
   et placer les points A et B d'affixes $z_A = 6 + \text{i}$ et $z_B = 2 + 5\text{i}$.
2. Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z_M qui vérifient la propriété indiquée.

a) $|z_M - z_A| \leqslant 2$
b) $|z_M - z_A| = 3$ (construction au compas)
c) $|z_M - z_A| = |z_M - z_B|$

Exercice 10.14

1. Quel est l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z - 4 - 2\mathrm{i}| = 3$?
2. Quel est l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z - 10| \leqslant 2$?
3. Quel est l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z - 4 - 2\mathrm{i}| = |z - 10|$?
4. Tracer ces ensembles dans un repère orthonormé du plan.

Indication pour les questions **1. 2. 3.** : on appelle A et B les points d'affixes respectifs $4 + 2\mathrm{i}$ et 10.

10.3 Propriétés des modules et arguments

Exercice 10.15

Le but de cet exercice est de démontrer que pour deux complexes z et z' on a les égalités :
$|z \times z'| = |z| \times |z'|$ *et* $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')$
Deux complexes z et z' sont écrits sous forme trigonométrique :
$z = |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ et $z' = |z'|(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta')$

1. Démontrer par un calcul que : $z \times z' = |z||z'|\big(\cos(\theta + \theta') + \mathrm{i}\sin(\theta + \theta')\big)$
2. En déduire les deux égalités à démontrer.

Exercice 10.16

z_1 et z_2 sont les nombres complexes : $z_1 = 3 \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right)$ et $z_2 = 5 \times \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$
Déterminer le module et un argument de $z_1 z_2$.

Exercice 10.17

Démontrer que pour tout complexe z, et pour tout entier naturel n on a les égalités :
$|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n \times \arg(z)$.
Indications
- Écrire d'abord z sous forme trigonométrique : $z = |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$.
- Démontrer ces égalités par récurrence.
- On suppose connues les égalités : $|z \times z'| = |z| \times |z'|$ et $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')$

Exercice 10.18

Le nombre complexe z est donné par : $z = 7 \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right)$
Déterminer le module et un argument de z^4

Exercice 10.19

Démontrer que pour tout complexe z, et pour tout complexe z' non nul on a les égalités :
$\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ et $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$
Indications

- On pose $Z = \dfrac{z}{z'}$ et ainsi on a : $z = Zz'$
- On suppose connues les égalités : $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$ et $\arg(z_1 \times z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

Exercice 10.20

z_1 et z_2 sont les nombres complexes : $z_1 = 15 \times \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $z_2 = 3 \times \left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Déterminer le module et un argument de $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Exercice 10.21

Le nombre complexe $(1+\mathrm{i})^{700}$ est-il un nombre réel ? Justifier.

COURS : *les propriétés des modules et argument sont récapitulées dans la section 10.2.*

10.4 Propriétés des modules et arguments et géométrie

Exercice 10.22

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.
A, B, C sont les points d'affixes respectifs $z_A = 2 + \mathrm{i}$ $\quad z_B = 6 + 2\mathrm{i}$ $\quad z_C = 5 + 6\mathrm{i}$.

1. À quoi sont associés les affixes $z_C - z_A$ et $z_B - z_A$?
2. Que représentent les arguments des affixes $z_C - z_A$ et $z_B - z_A$?
3. Calculer $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.
4. Déterminer un argument de $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.
5. Que représente cet argument ?

COURS : *paragraphe 10.7.*

Exercice 10.23

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.
A, B, C, D sont les points d'affixes respectifs $z_A = -1 + 2\mathrm{i}$ $\quad z_B = 1 + 4\mathrm{i}$ $\quad z_C = 3 - 2\mathrm{i}$ $\quad z_D = -1$.

1. Tracer la figure.
2. Calculer $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.
3. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.
4. Démontrer que les points A, B, C, D sont sur un même cercle, dont on précisera le centre et le rayon.

10.5 Forme exponentielle d'un nombre complexe

Exercice 10.24

Pour tout réel θ, on pose $f(\theta) = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$
Démontrer que : $f(\theta) \times f(\theta') = f(\theta + \theta')$

COURS : *avant de faire les exercices suivants, lire la section 10.3.*

Exercice 10.25

1. Écrire sous forme algébrique les nombres complexes ci-dessous.

   a) $z_1 = 6e^{i\frac{\pi}{4}}$ **b)** $z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$ **c)** $z_3 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$

2. Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes ci-dessous.

   a) $z_1 = 1 + i$ **b)** $z_2 = 2\sqrt{3} + 2i$ **c)** $z_3 = 3$ **d)** $z_4 = -4$ **e)** $z_5 = 2i$ **f)** $z_6 = -3i$

Exercice 10.26

1. Justifier pourquoi le nombre complexe $z = -7e^{i\frac{\pi}{4}}$ n'est pas sous la forme exponentielle.
2. Écrire z sous la forme exponentielle. Indication : écrire d'abord -7 sous la forme exponentielle.

Exercice 10.27

Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes ci-dessous.

1. $z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{2}} \times 5e^{i\frac{\pi}{4}}$ **2.** $z_2 = \dfrac{8e^{i\pi}}{4e^{i\frac{\pi}{3}}}$ **3.** $z_3 = (7e^{i\frac{\pi}{6}})^2$ **4.** $z_4 = \dfrac{1}{2e^{i\frac{\pi}{3}}}$ **5.** $z_5 = \overline{2e^{i\frac{\pi}{3}}}$

Exercice 10.28

On donne $z = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Calculer $z + \dfrac{1}{z}$.

Exercice 10.29

On donne $z = 3\sqrt{3} + 3i$.

1. Écrire z sous forme exponentielle.
2. En déduire une forme exponentielle de chacun des complexes suivants : $-z$; z^2 ; $\dfrac{1}{z}$; $\overline{z}$.

Exercice 10.30

On donne $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$.

1. Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
2. Écrire la forme algébrique de $z_1 z_2$.
3. Écrire une forme exponentielle de $z_1 z_2$.
4. En déduire les valeurs exactes de $\cos \dfrac{5\pi}{12}$ et de $\sin \dfrac{5\pi}{12}$.

Exercice 10.31

Retrouver les formules donnant $\cos(a + b)$ et $\sin(a + b)$ en utilisant le fait que $e^{i(a+b)} = e^{ia} \times e^{ib}$

Exercice 10.32

Calculer : $\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$. Les égalités obtenues sont appelées *formules d'Euler*.

Exercice 10.33

On donne $z = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. Calculer $1 + z + z^2 + z^3 + z^4$.

10.6 Problème

Exercice 10.34

On donne : $z_0 = 8$ et pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_n$.

On appelle A_n le point d'affixe z_n.

1. **a)** Calculer z_1, z_2, z_3.
   b) Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 dans un repère orthonormé.
   c) Quelle est la nature du triangle OA_1A_2 ? Le démontrer.
2. La suite (r_n) est définie par : $r_n = |z_n|$
   a) Justifier que la suite (r_n) est géométrique. On donnera son premier terme et sa raison.
   b) Écrire r_n en fonction de n.
   c) Quelle est la limite de la suite (r_n) ? Justifier.
   d) Que peut-on en déduire pour la suite des points A_n ?
3. Étant donné un réel positif d, on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $r_n < d$.
   Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier n.

Variables	:	r est un réel
		d est un réel
		n est un entier
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0
		Affecter à r la valeur 8
Entrée	:	Demander la valeur de d
Traitement	:	
Sortie	:	

Exercice 10.35

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.

À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = z^2 - 2z + 4$.

1. **a)** Démontrer qu'il existe deux points A et B qui sont associés à l'origine O du repère.
   On appelle z_A et z_B les affixes respectifs des points A et B.
   b) Écrire z_A et z_B sous forme exponentielle.
   c) Quelle est la nature du triangle OAB ? Le démontrer.
   d) Déterminer une mesure en radians de l'angle orienté de vecteurs $\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}\right)$.
2. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont réels, tels que le point M' associé soit sur l'axe des réels.
3. Dans le plan complexe, représenter les points A et B ainsi que l'ensemble $\mathscr{E}$.

10.7 Pour réviser

Chapitre 9 – Nombres complexes

Ce chapitre du livre contient tout ce qui concerne les nombres complexes.

Ce qui est indiqué ci-dessous concerne seulement les formes trigonométriques et exponentielles des nombres complexes.

Pour ce qui concerne la forme algébrique, l'équation du second degré, l'affixe d'un point ou d'un vecteur, le conjugué, voir les fiches du chapitre 5.

Les exercices résolus

- ex 32 p 245 : passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique
- ex 33 p 245 : passer de la forme trigonométrique à la forme algébrique
- ex 38 p 247 : utiliser la forme trigonométrique et la forme algébrique d'un complexe pour calculer $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$
- ex 39 p 247 : puissance d'un nombre complexe
- ex 44 p 249 : forme algébrique et forme exponentielle
- ex 45 p 249 : retrouver des formules de trigonométrie

Rubrique *Pour s'exercer*, corrigés page 467

- ex 35 p 245 : mettre un complexe sous forme trigonométrique
- ex 37 p 245 : mettre un complexe sous forme algébrique
- ex 40 p 247 : mettre un complexe sous forme trigonométrique
- ex 42 p 247 : mettre un complexe sous forme algébrique
- ex 46 p 249 : mettre une forme exponentielle sous forme algébrique
- ex 51 p 249 : retrouver des formules de trigonométrie

Rubrique *Objectif bac*, corrigés page 476

- ex 160 p 257, questions 2 à 5
- ex 161 p 257, questions 2 et 3
- ex 162 à 165 p 257

II Cours

Rappel

Les nombres complexes ont été introduits au chapitre 5, et les notions suivantes ont été traitées :

- forme algébrique ;
- opérations ;
- équations du second degré ;
- représentation géométrique ;
- conjugué.

10.1 Module, arguments, forme trigonométrique

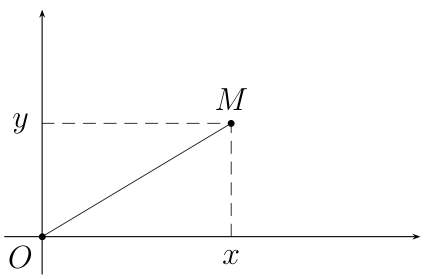
Définition 10.1 (Module d'un nombre complexe)

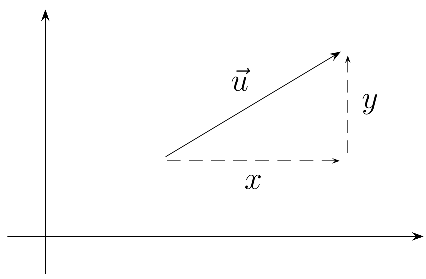
Le module d'un nombre complexe $z = x + y\mathrm{i}$ s'écrit $|z|$ et il est défini par : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Remarque : pour un nombre réel, son module est sa valeur absolue.

Propriété 10.1 (Interprétation géométrique du module)

- Pour un point M d'affixe z_M dans un repère orthonormé du plan d'origine O, le module de z_M est égal à la distance OM : $|z_M| = OM$
- Pour un vecteur $\vec{u}$ d'affixe $z_{\vec{u}}$ dans un repère orthonormé du plan, le module de $z_{\vec{u}}$ est égal à la norme du vecteur $\vec{u}$: $|z_{\vec{u}}| = ||\vec{u}||$





Propriété 10.2

Pour deux complexes z et z', on a $z\overline{z} = |z|^2$

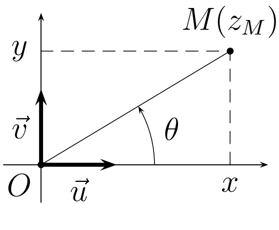
Démonstration

$$z\overline{z} = (x + y\mathrm{i}) \times (x - y\mathrm{i}) = x^2 - (y\,\mathrm{i})^2 = x^2 - y^2\,\mathrm{i}^2 = x^2 + y^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = |z|^2$$

Définition 10.2 (Argument d'un nombre complexe)

Pour un point M d'affixe z dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$ du plan, on appelle argument de z, et on note $\arg(z)$, une mesure de l'angle de vecteur $(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OM})$.

Exemple : sur la figure ci-dessous $\arg(z_M) = \theta = (\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OM})$.



Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$ du plan, considérons un point M d'affixe $z = x + y\mathrm{i}$.

Si θ est un argument de z, alors $x = |z| \times \cos\theta$ et $y = |z| \times \sin\theta$.

Ainsi : $z = x + y\mathrm{i} = |z| \times \cos\theta + |z| \times \sin\theta \times \mathrm{i} = |z| \times (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$.

Définition 10.3

z est un nombre complexe non nul et θ est un argument de z.
On appelle **forme trigonométrique de z** l'écriture $|z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$.

Méthode pour calculer la forme trigonométrique d'un complexe $z = x + y\mathrm{i}$

- On calcule $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- On écrit z sous la forme : $|z| \times \dfrac{x + y\mathrm{i}}{|z|} = |z| \times \left(\dfrac{x}{|z|} + \dfrac{y}{|z|}\mathrm{i}\right)$.
- On détermine θ tel que : $\cos(\theta) = \dfrac{x}{|z|}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{y}{|z|}$.

  Pour cela, on utilise un cercle trigonométrique et les valeurs remarquables du tableau du paragraphe 7.1.f du chapitre 7 (Fonctions trigonométriques).
- On peut alors écrire z sous la forme trigonométrique : $z = |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$.

Exemple

Écrivons sous la forme trigonométrique le nombre complexe $z = \sqrt{3} - \mathrm{i}$.

$|z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$

$z = \sqrt{3} - \mathrm{i} = 2 \times \dfrac{\sqrt{3} - \mathrm{i}}{2} = 2 \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)$

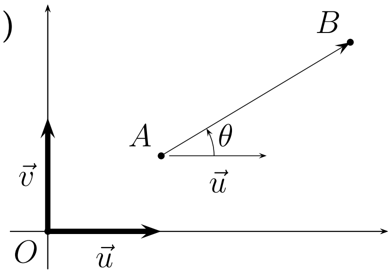
À l'aide du cercle trigonométrique et des valeurs remarquables de sinus et cosinus, on obtient : $\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

Conclusion : $z = \sqrt{3} - \mathrm{i} = \boxed{2 \times \left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)}$.

Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$, pour des points A et B d'affixes respectifs z_A et z_B, on rappelle que $\boxed{\text{l'affixe d'un vecteur } \overrightarrow{AB} \text{ est } z_B - z_A :\ z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A}$.

Définition 10.4 (Module et argument de l'affixe d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.
Pour des points A et B d'affixes respectifs z_A et z_B on a :
$AB = |z_B - z_A|$ et $(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$



10.2 Propriétés des modules et arguments

Propriété 10.3 (Nombres complexes égaux)

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs modules sont égaux, et si leurs arguments sont égaux à un multiple de 2π près.
Autrement dit : $z_1 = z_2 \iff |z_1| = |z_2|$ et $\arg(z_1) = \arg(z_2) + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Propriété 10.4 (Opposé et conjugué)

Pour tout nombre complexe z,
- $|-z| = |z|$ et $\arg(-z) = \arg z + \pi + 2k\pi$
- $|\overline{z}| = |z|$ et $\arg(\overline{z}) = -\arg z + 2k\pi$

Propriété 10.5 (Réel et imaginaire)

Pour tout nombre complexe z non nul,
- z est un nombre réel si et seulement si $\arg(z) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
- z est un nombre imaginaire pur si et seulement si $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Propriété 10.6 (Produit, puissance et quotient)

Pour tous nombres complexes z et z',
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$ et $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')$
- $|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n \times \arg(z)$
- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ et $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

Démonstration de la première égalité

Pour deux complexes z et z', appelons respectivement θ et θ' les arguments de z et z', et ainsi : $z = |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta))$ et $z' = |z'|(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta')$

Calculons $z \times z'$:

$$\begin{aligned} z \times z' &= |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \times |z'|(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta') \\ &= |z| \times |z'| \times (\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + \mathrm{i}(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta') \\ &= |z||z'|\big(\cos(\theta+\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta+\theta')\big) \end{aligned}$$

On a donc : $|z \times z'| = |z| \times |z'|$ et $\arg(z \times z') = \theta + \theta' = \arg(z) + \arg(z')$

Propriété 10.7 (Conséquence géométrique)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.
Pour des points A, B, C, D, d'affixes respectifs z_A, z_B, z_C, z_D, dans on a :
$\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$

10.3 Forme exponentielle d'un nombre complexe

Posons $f(\theta) = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ et calculons $f(\theta) \times f(\theta')$:

$f(\theta) \times f(\theta') = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \times (\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta')$

or nous avons démontré dans le paragraphe 10.6 que :

$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \times (\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta') = \cos(\theta + \theta') + \mathrm{i}\sin(\theta + \theta')$

Donc : $f(\theta) \times f(\theta') = f(\theta + \theta')$

On obtient donc une propriété analogue à celle de la fonction exponentielle.

C'est cela qui a donné aux mathématiciens comme Euler en 1748 l'idée de définir : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ et puisque la forme trigonométrique d'un complexe z s'écrit $|z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, on a ainsi : $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

On donne donc les définitions ci-dessous.

Définition 10.5

Pour nombre réel θ : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$

Définition 10.6

Pour nombre complexe z, d'argument θ, une **notation exponentielle de** z est l'écriture $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

Propriété 10.8

Pour tous réels θ et θ' et tout entier naturel n,

- $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| = 1$ et $\arg(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \theta + 2k\pi$
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$
- $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ (formule de Moivre)
- $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$
- $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}$
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} \iff \theta = \theta' + 2k\pi$

Chapitre 11

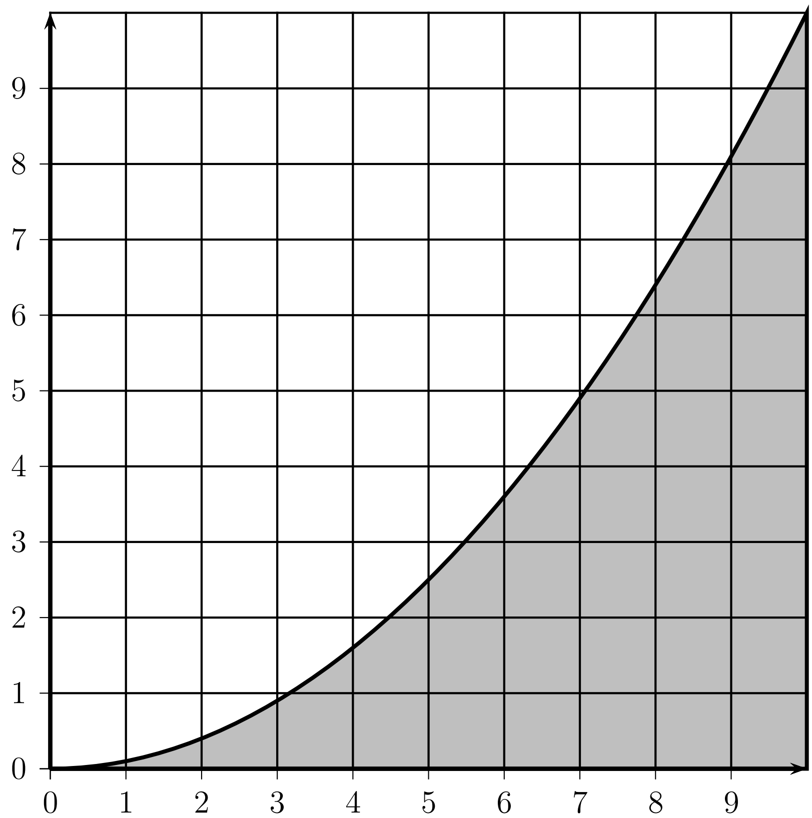
Intégrales et primitives

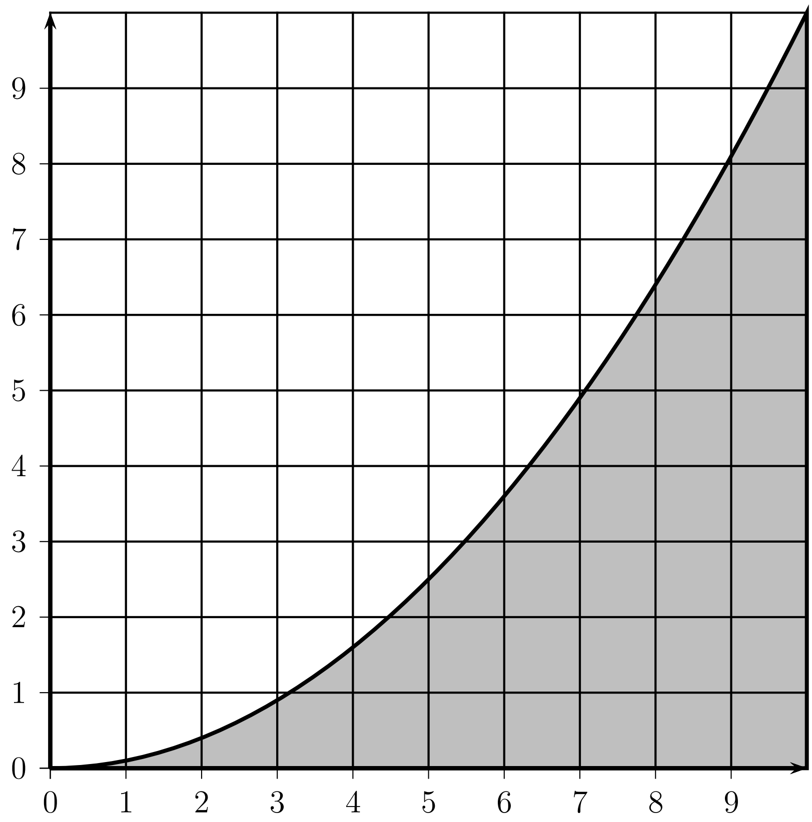
I Exercices

11.1 Intégrale de fonction positive

Exercice 11.1

Évaluer approximativement l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous, l'axe des abscisses, et la droite d'équation $x = 10$.





COURS : *lire la définition d'une intégrale au paragraphe 11.2*

Exercice 11.2 (Calcul approché d'une intégrale par la méthode des rectangles)

La fonction représentée dans l'exercice sur fiche n° 11.1 était la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{10}$.

Elle est à nouveau représentée ci-dessous.

Voici un algorithme.

Entrée : n

Stocker 0 dans s

Pour des valeurs de k allant de 0 à $n-1$, de 1 en 1

  Stocker $k \times \dfrac{10}{n}$ dans x

  Stocker $\dfrac{x^2}{10}$ dans y

  Stocker $y \times \dfrac{10}{n}$ dans r

  s prend la valeur $s + r$

  Fin de la boucle "pour"

Sortie (résultat) : s

1. Exécuter cet algorithme lorsque $n = 5$, en complétant ci-dessous.
Entrée : $n = 5$

k						
x						
y						
r						
s	0					

Sortie : $s =$ . . . .

2. Que représentent les valeurs successives de r ?

3. Que représente le résultat de cet algorithme (c'est à dire la valeur finale de s) ?

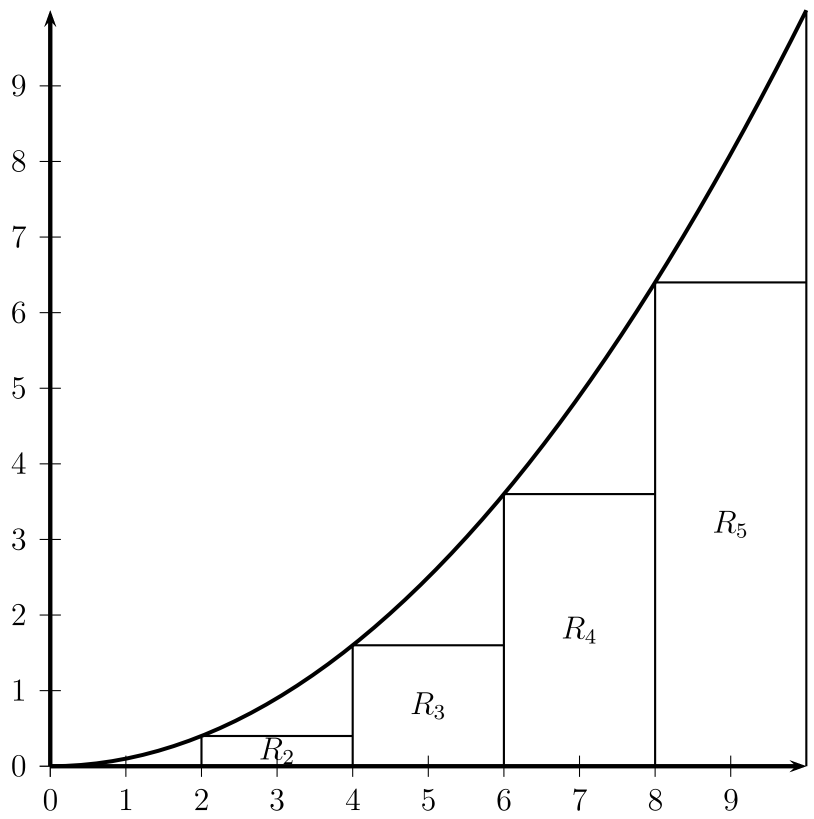
4. a) Programmer cet algorithme à la calculatrice ou en Python.

b) Vérifier en exécutant ce programme avec $n = 5$.

c) Exécuter ce programme
- à la calculatrice, avec $n = 20$, puis $n = 100$, puis $n = 1000$ (le temps de calcul est de quelques secondes de calcul pour $n = 100$ et d'environ 45 secondes pour $n = 1000$) ;
- en Python avec $n = 20$, puis $n = 100$, $n = 1\,000$, $n = 10\,000$, $n = 100\,000$.

d) Compléter

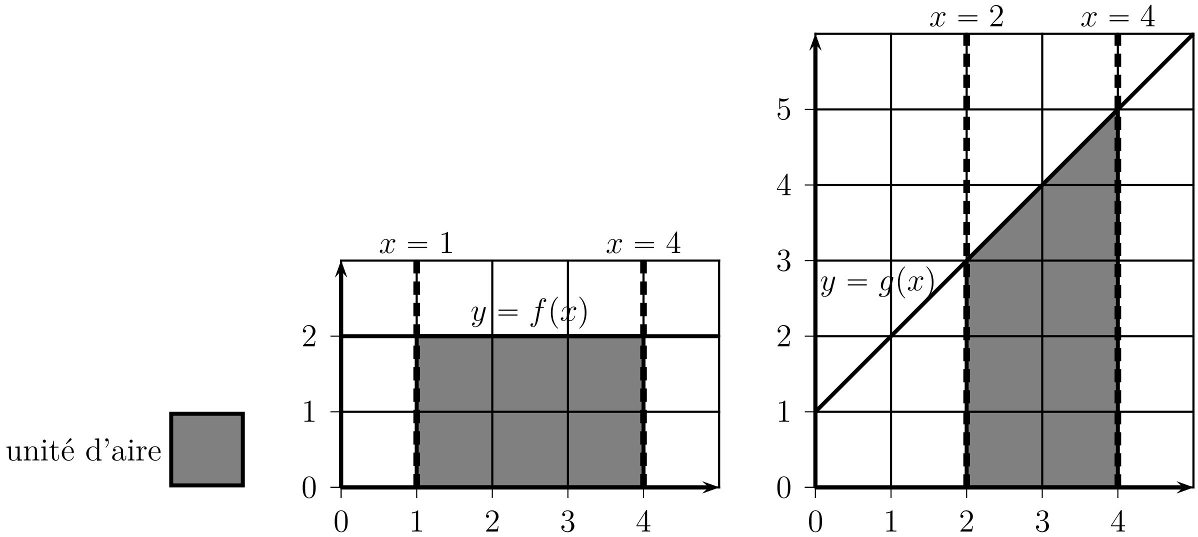
n	5					
Valeur finale de s						



Exercice 11.3 (Intégrale d'une fonction affine (1))

Les fonctions définies par $f(x) = 2$ et $g(x) = x + 1$ sur l'intervalle $[0\,;\,5]$ sont représentées graphiquement ci-dessous.

1. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,dx$, c'est à dire l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 4$.
2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_2^4 g(x)\,dx$, c'est à dire l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_g$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives $x = 2$ et $x = 4$.



COURS : *lire le paragraphe 11.2*

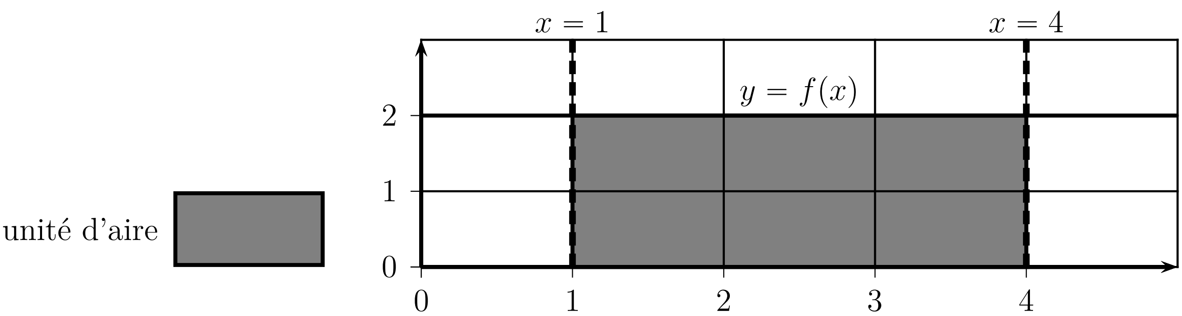
Exercice 11.4 (Intégrale d'une fonction affine (2))

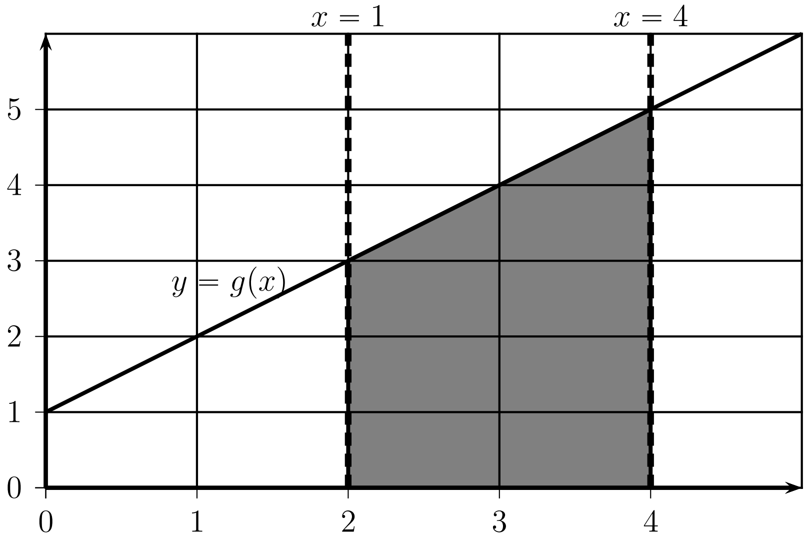
Les fonctions f et g de l'exercice précédent sont à nouveau représentées graphiquement ci-dessous et page suivante, chacune dans un repère orthogonal, d'unité 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée. Dans ce cas l'unité d'aire est l'aire du « rectangle unité », c'est à dire 2 cm^2.

1. **a)** Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 4$ en unité d'aire puis en cm^2.

   b) Quel résultat est égal à l'intégrale $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,dx$?
2. **a)** Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}_g$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives $x = 2$ et $x = 4$ en unité d'aire puis en cm^2.

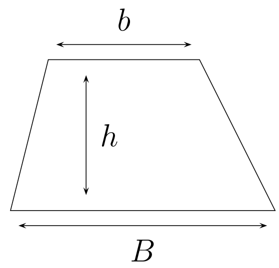
   b) Quel résultat est égal à l'intégrale $\displaystyle\int_2^4 g(x)\,dx$?





Exercice 11.5 (Intégrale d'une fonction affine (3))

Calculer les intégrales ci-dessous. Comme ce sont des intégrales de fonctions affines, les aires à calculer sont des aires de trapèzes.
Rappelons donc la formule de calcul de l'aire d'un trapèze :
aire d'un trapèze $= \dfrac{(b+B)\times h}{2}$

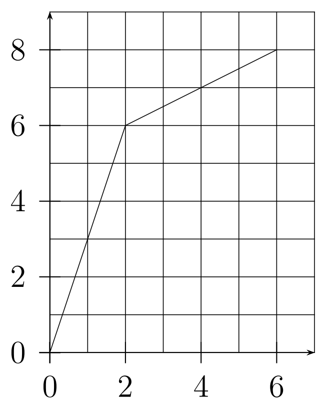


(1) $\displaystyle\int_4^{12}(0,25x+3)\,dx$ (2) $\displaystyle\int_{0,5}^{3}(2x+1)\,dx$ (3) $\displaystyle\int_1^{5}(-x+7)\,dx$ (4) $\displaystyle\int_2^{6}(-0,5x+4)\,dx$

Exercice 11.6

La fonction f est définie par $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0,5x+5 & \text{si } 2 < x \leqslant 6 \end{cases}$

Elle est représentée graphiquement ci-contre.
On appelle cela une *fonction affine par morceaux*.

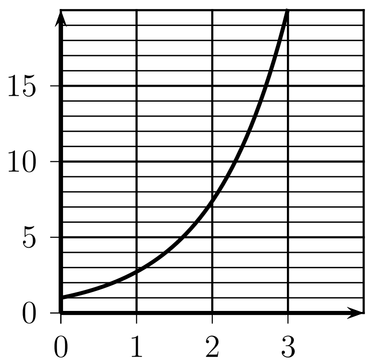


1. En hachurant ou en coloriant, mettre en évidence l'intégrale $\displaystyle\int_0^6 f(x)\,dx$ sur la figure ci-contre.

2. Calculer $\displaystyle\int_0^6 f(x)\,dx$.

Exercice 11.7

La fonction exponentielle est représentée ci-contre sur l'intervalle $[0 ; 3]$.



1. En hachurant ou en coloriant, mettre en évidence sur le graphique ci-contre l'intégrale $\displaystyle\int_1^3 \mathrm{e}^x\,dx$

2. Déterminer graphiquement un encadrement de cette intégrale.

Exercice 11.8

1. Sur la figure 1 ci-dessous, construire une courbe pouvant représenter une fonction f définie et continue sur [-2 ; 3] et vérifiant $3 \leqslant \displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)dx \leqslant 9$
2. Sur la figure 2 ci-dessous, construire une courbe pouvant représenter une fonction g définie et continue sur [-1 ; 4] et vérifiant $4 \leqslant \displaystyle\int_{1}^{3} g(x)dx \leqslant 6$

Fig. 1

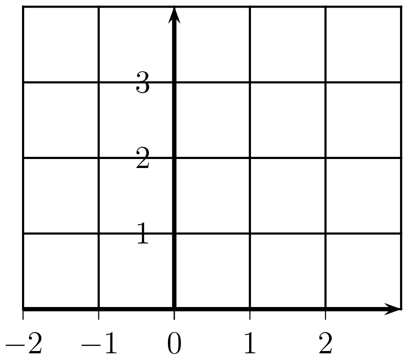
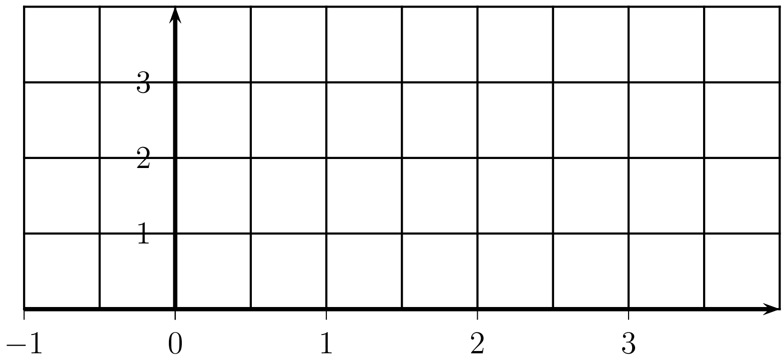


Fig. 2



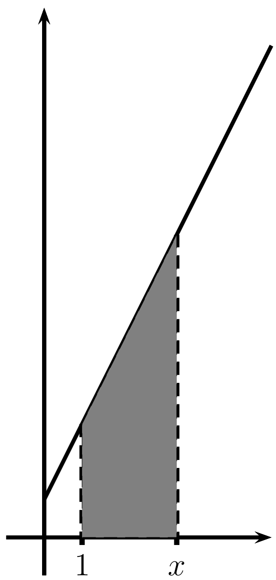
11.2 Théorème fondamental pour une fonction continue, positive

Exercice 11.9

La fonction f est définie par $f(t) = 2t + 1$ et elle est représentée ci-contre.

La fonction F est définie par $F(x) = \displaystyle\int_{1}^{x} f(t)\,dt$

1. À l'aide d'un calcul d'aire, calculer l'expression de $F(x)$ en fonction de x.
2. Calculer $F'(x)$
3. Que constate-t-on ?



COURS : *lire le paragraphe 11.3 qui généralise cette propriété.*

11.3 Primitive d'une fonction

Exercice 11.10

Soit deux fonctions f et F définies sur un intervalle I. Dire que F est une primitive de f sur I signifie que f est la dérivée de F sur I, c'est à dire $\mathrm{F}' = f$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 3$

1. Déterminer une primitive F de f.

2. Déterminer deux autres primitives F_2 et F_3 de f.

3. La fonction f a en fait une infinité de primitives sur $\mathbb{R}$. Quelle est la formule générale pour les primitives de f ?

Exercice 11.11

Pour chacune des fonctions définies ci-dessous, déterminer 3 primitives.

(1) $f(x) = 4x^3$ (2) $f(x) = x^5$ (3) $f(x) = \mathrm{e}^x$

COURS : *lire le paragraphe 11.4.a*

Exercice 11.12

Le tableau ci-contre rappelle les dérivées des fonctions usuelles.
Pour chacune des fonctions f suivantes, utiliser ce tableau pour déterminer une primitive F de f.

1. $f(x) = 1$ F$(x) =$ ....

2. $f(x) = x^2$ F$(x) =$ ....

3. $f(x) = x^5$ F$(x) =$ ....

4. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ F$(x) =$ ....

5. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ F$(x) =$ ....

6. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ F$(x) =$ ....

7. $f(x) = e^x$ F$(x) =$ ....

8. $f(x) = \cos(x)$ F$(x) =$ ....

9. $f(x) = \sin(x)$ F$(x) =$ ....

Tableau de DÉRIVÉES	
$f(x)$	$f'(x)$
k constante	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
e^x	e^x
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$

Exercice 11.13

On rappelle que pour une fonction u dérivable sur un intervalle I, on sait que :

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ et que $(e^u)' = u'e^u$

Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer une primitive F de f.

1) $f(x) = \dfrac{1}{2x+3}$ 2) $f(x) = \dfrac{1}{3x-5}$ 3) $f(x) = \dfrac{1}{ax+b}$ $(a \neq 0)$

4) $f(x) = e^{4x-6}$ 5) $f(x) = e^{0,2x}$ 6) $f(x) = e^{ax+b}$ $(a \neq 0)$

COURS : *lire le paragraphe 11.4.b*

Exercice 11.14

Pour chacune des fonctions f définies ci-dessous, déterminer une primitive F de f.

1) $f(x) = 5x + 4$ 2) $f(x) = x^2 + x^3$ 3) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 4) $f(x) = 3x^2 - 4x + 7$

5) $f(x) = -\dfrac{3}{x+1}$ 6) $f(x) = 5 - \dfrac{1}{x+1}$ 7) $f(x) = \dfrac{2}{2x+1}$ 8) $f(x) = \dfrac{1}{3x-2}$

9) $f(x) = x + 9\,\mathrm{e}^{-0,3x}$ 10) $f(x) = 128\,\mathrm{e}^{0,004x}$

Exercice 11.15

Vérifier que F est une primitive de f : $f(x) = 3xe^{-x}$ $\quad \mathrm{F}(x) = (-3-3x)e^{-x}$

Exercice 11.16

Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer une primitive F de f.

1) $f(x) = 3(3x+1)^4$ 2) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ 3) $f(x) = \dfrac{5}{(5x-6)^2}$ 4) $f(x) = \dfrac{4x^3}{\sqrt{x^4+7}}$

5) $f(x) = 9\mathrm{e}^{9x-4}$ 6) $f(x) = (4x+1)^5$ 7) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+9}$ 8) $f(x) = \dfrac{1}{(3x-1)^2}$

9) $f(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$ Indication : $f(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x$. 10)$f(x) = \dfrac{3+\ln x}{x}$

Exercice 11.17

Déterminer une primitive F de la fonction définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

Exercice 11.18

Déterminer une primitive F de la fonction définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

Exercice 11.19 (Primitives avec conditions initiales)

Déterminer chaque fois la primitive F de la fonction f qui respecte la condition indiquée.

1. $f(x) = 4x^2 - 1$ $\quad F(0) = 2$

2. $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ $\quad F(0) = 0$

3. $f(x) = 10(x-1)^4$ $\quad F(0) = 1$

11.4 Calculs d'intégrales de fonctions continues positives

COURS : *lire les paragraphes 11.5.a et 11.5.b*

Exercice 11.20

Calculer les intégrales ci-dessous.

(1) $\displaystyle\int_3^5 4t^3\,dt$ (2) $\displaystyle\int_3^5 t^5\,dt$ (3) $\displaystyle\int_3^5 \mathrm{e}^t\,dt$

Exercice 11.21

La fonction définie par $f(x) = 0,3x^2 + 1$ est représentée page suivante. L'aire $\mathcal{A}$ est l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$.

1. En s'aidant du quadrillage, donner un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$ par deux nombres entiers.

2. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en calculant une intégrale.

3. Vérifier que le résultat précédent est bien compris entre les deux entiers de la première question.

Ci-dessous, fig. 1 pour l'exercice 11.21 et fig. 2, 3, 4 pour l'exercice 11.22

Fig. 1

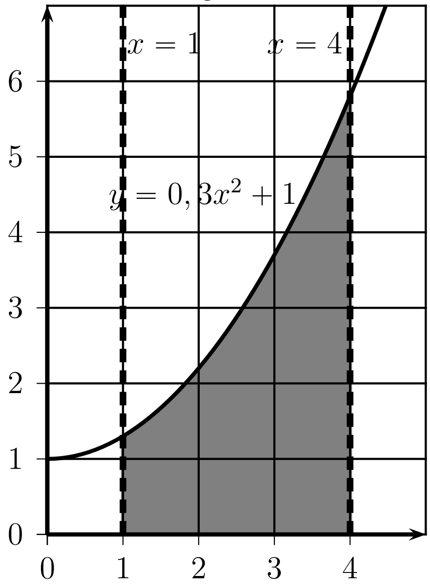


Fig.2

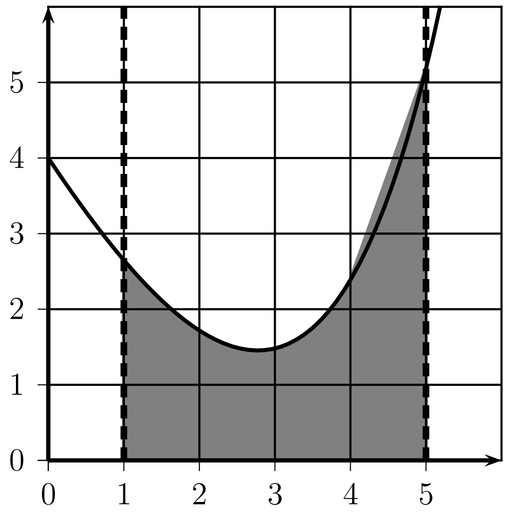


Fig. 3

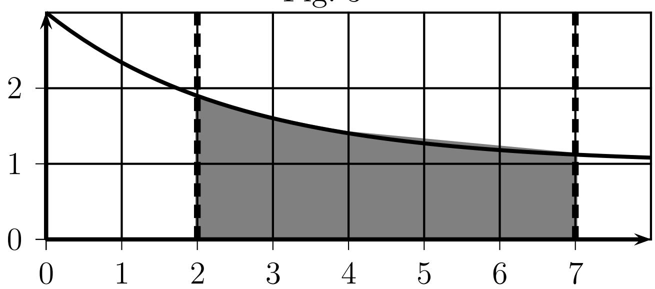
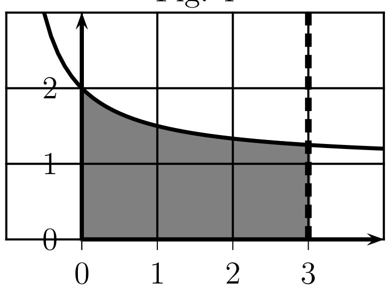


Fig. 4



Exercice 11.22

Même exercice que l'exercice 11.21 avec chacune des fonctions et des aires indiquées.

1. La fonction définie par $f(x) = -2x + 3 + e^{0,5x}$ est représentée sur la figure 2. L'aire $\mathcal{A}$ est l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 5$.
2. La fonction définie par $f(x) = 1 + 2e^{-0,4x}$ est représentée sur la figure 3. L'aire $\mathcal{A}$ est l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives $x = 2$ et $x = 7$.
3. La fonction définie par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x+1}$ est représentée sur la figure 4. L'aire $\mathcal{A}$ est l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 3$.

Exercice 11.23

La fonction définie par $f(x) = 4 - 0,25x^2$ est représentée ci-dessous (fig. 1, plus bas) dans un repère orthogonal d'unité 2 cm pour l'axe des abscisses et d'unité 1 cm pour l'axe des ordonnées.

L'aire $\mathcal{A}$ est l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 2$.

1. En s'aidant du quadrillage, donner un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$ par deux nombres entiers, d'abord en unités d'aire, puis en cm^2.

2. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en calculant une intégrale.
3. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2.
4. Vérifier avec les encadrements trouvés à la première question.

Exercice 11.24

Même exercice que l'exercice 11.23 avec la fonction f et l'aire indiquée ci-dessous.

La fonction définie par $f(x) = 0,2x + e^{-x}$ est représentée ci-dessous (fig. 2) dans un repère orthogonal d'unité 1 cm pour l'axe des abscisses et d'unité 2 cm pour l'axe des ordonnées.

L'aire $\mathcal{A}$ est l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 4$.

Fig. 1

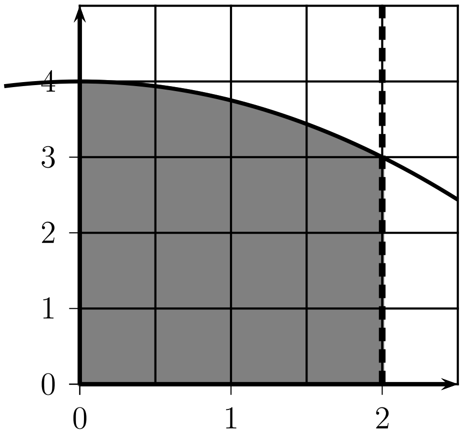
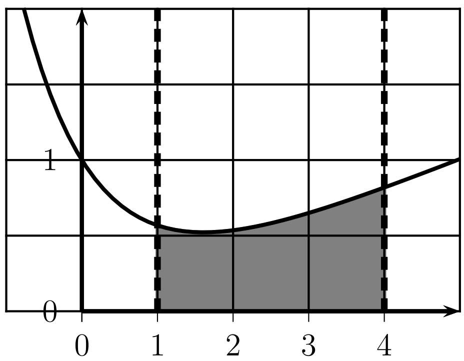


Fig. 2



Exercice 11.25

La fonction f définie par $f(x) = \ln x$ est représentée graphiquement page suivante sur l'intervalle $[0{,}4\,;\,5]$ (figure 1).

1. Justifier que la fonction définie par $\mathrm{F}(x) = x\ln x - x$ est une primitive de f sur l'intervalle $[0{,}4\,;\,5]$.
2. Mettre en évidence sur le graphique ci-dessous, l'intégrale $\displaystyle\int_2^4 \ln x\,dx$.
3. Justifier par un calcul que cette intégrale est égale à $6\ln 2 - 2$.
4. Arrondir le résultat précédent au dixième près et préciser ce que signifie le résultat.

Exercice 11.26

La fonction g définie par $g(x) = -4x + 11 - \dfrac{4}{x}$ est représentée graphiquement page suivante sur l'intervalle $[0\,;\,2{,}5]$ (figure 2).

1. Mettre en évidence sur le graphique page suivante l'intégrale suivante $\displaystyle\int_{0{,}5}^{2} g(x)\,dx$.
2. Justifier par un calcul que cette intégrale est égale à $9 - 8\ln 2$.
3. Arrondir le résultat précédent au dixième près et préciser ce que signifie le résultat.

Fig. 1

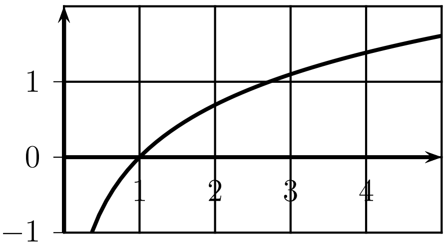
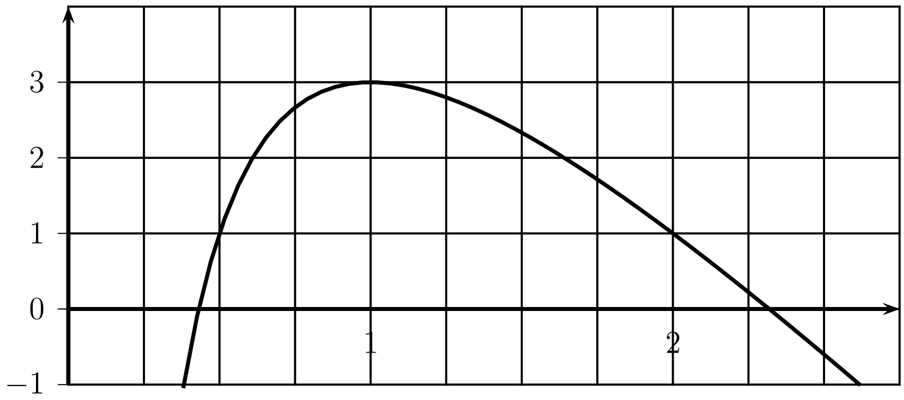


Fig. 2

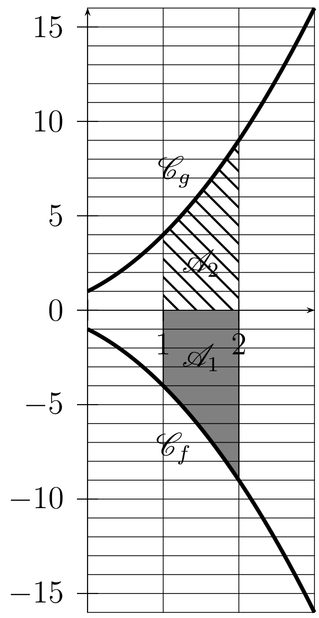


11.5 Calculs d'intégrales de fonctions continues de signe quelconque

Exercice 11.27 (Intégrale d'une fonction continue négative)

La fonction f est définie sur $[0\ ;\ 4]$ par $f(x) = -x^2 - 2x - 1$ et elle est représentée ci-dessous par la courbe $\mathscr{C}_f$.

On appelle $\mathscr{A}_1$ l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$,



1. **a)** Sans justifier, quel est le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1\ ;\ 2]$?

   b) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$.

2. La fonction g est la fonction $-f$ et elle est représentée ci-dessous par la courbe $\mathscr{C}_g$.

   On appelle $\mathscr{A}_2$ l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.

   a) Que peut-on dire des aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$? Justifier sans calcul.

   b) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 g(x)\,dx$.

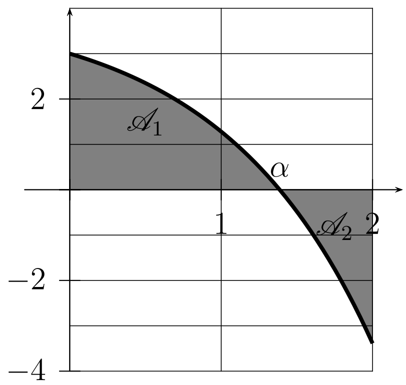
3. Que peut-on dire de l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$ par rapport à l'aire $\mathscr{A}_1$?

Exercice 11.28 (Intégrale d'une fonction continue de signe non constant)

La fonction f est définie sur $[0 \; ; \; 2]$ par $f(x) = 4 - \mathrm{e}^x$ et elle est représentée ci-dessous par la courbe $\mathscr{C}_f$.

1. Déterminer la valeur exacte du nombre α entre 0 et 2 tel que $f(\alpha) = 0$.
2. On appelle
   - $\mathscr{A}_1$ l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$,
   - $\mathscr{A}_2$ l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = 2$.

   Calculer $\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2$.

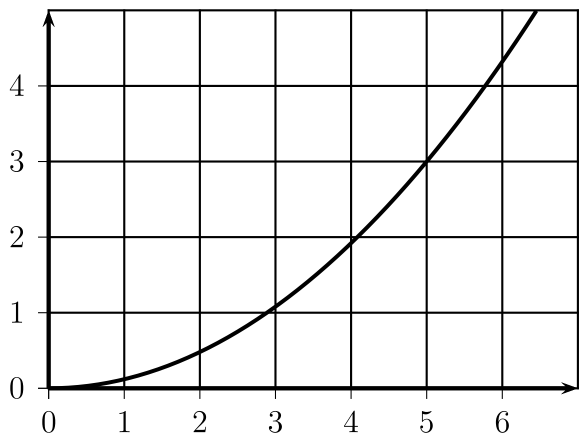


11.6 Valeur moyenne d'une fonction

Exercice 11.29

La fonction définie par $f(x) = 0,12x^2$ est représentée graphiquement ci-contre.

1. Mettre en évidence sur cette figure l'intégrale $\displaystyle\int_2^6 0,12x^2\,dx$ et la calculer.
2. Placer les points A $(2\,;\,0)$ et B $(6\,;\,0)$.
3. On veut tracer le rectangle ABCD dont l'aire soit égale à l'intégrale précédente.
   a) Quelle est sa longueur (sans justifier) ?
   b) Calculer sa largeur. Arrondir au dixième près. On appelle ce nombre **la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[2\,;\,6]$**
   c) Tracer le rectangle ABCD.



11.7 Propriétés de l'intégrale

Exercice 11.30 (Linéarité)

1. Calculer $\displaystyle\int_1^5 (2x + 3x^2)\,dx$ et $\displaystyle\int_1^5 2x\,dx + \int_1^5 3x^2\,dx$ et comparer les résultats.
2. Calculer $\displaystyle 5 \times \int_2^7 \frac{1}{x+2}\,dx$ et $\displaystyle\int_2^7 5 \times \frac{1}{x+2}\,dx$ et comparer les résultats.

Exercice 11.31

1. Sachant que $\displaystyle\int_0^3 4x^2e^{2x}\,dx = 13e^6 - 1$ et que $\displaystyle\int_0^3 xe^x\,dx = 2e^3 + 1$ calculer $\displaystyle\int_0^3 (4x^2e^{2x} + xe^x)\,dx$
2. Sachant que $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{\ln(1,5)}{2}$ calculer $\displaystyle\int_2^3 \frac{4}{x^2-1}\,dx$

Exercice 11.32 (Signe d'une intégrale)

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ par : $f(x) = 2x - 10$

L'objectif de cet exercice est de faire le lien entre le signe d'une fonction et le signe d'une intégrale

- Tracer la représentation graphique de la fonction f ci-dessous.
- Dresser le tableau de signes de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$.
- Calculer les intégrales suivantes : $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,dx$, $\displaystyle\int_6^8 f(x)\,dx$.
- Si $a < b$, quel est apparemment le signe de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ selon le signe f sur $[a\ ;\ b]$.

Exercice 11.33

Une fonction f est définie sur l'intervalle $[2\ ;\ 15]$;
- positive sur l'intervalle $[2\ ;\ 9]$;
- négative sur l'intervalle $[9\ ;\ 15]$;

1. À propos du signe de l'intégrale $\displaystyle\int_9^{12} f(x)\,dx$ on peut dire que (une seule bonne réponse) :

(a) son signe est positif ; (b) son signe est négatif ; (c) on ne peut pas conclure.

2. Mêmes questions pour l'intégrale $\displaystyle\int_7^{13} f(x)\,dx$

3. Mêmes questions pour l'intégrale $\displaystyle\int_3^{7} f(x)\,dx$

Exercice 11.34

Sans calcul, déterminer le signe de chacune des intégrales suivantes.

(1) $\displaystyle\int_{0,5}^1 \ln(x)\,dx$ (2) $\displaystyle\int_2^7 \ln(x)\,dx$ (3) $\displaystyle\int_{-8}^2 \mathrm{e}^x\,dx$ (4) $\displaystyle\int_4^6 \mathrm{e}^{-x}\,dx$ (5) $\displaystyle\int_1^5 x\ln(x)\,dx$

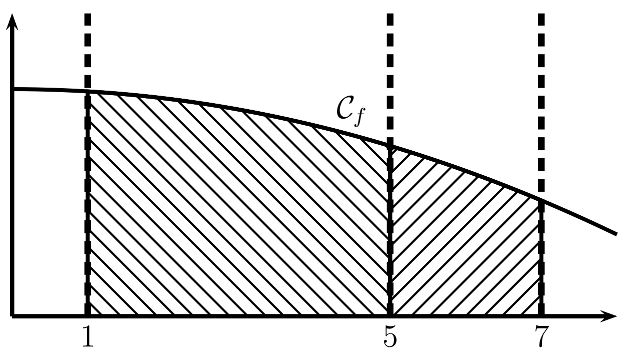
Exercice 11.35 (Relation de Chasles)

La fonction f est représentée ci-contre, ainsi que les intégrales $\displaystyle\int_1^5 f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_5^7 f(x)\,dx$.

On donne les valeurs suivantes :

$\displaystyle\int_1^5 f(x)\,dx = 10,76$ et $\displaystyle\int_5^7 f(x)\,dx = 3,82$.

Calculer $\displaystyle\int_1^7 f(x)\,dx$



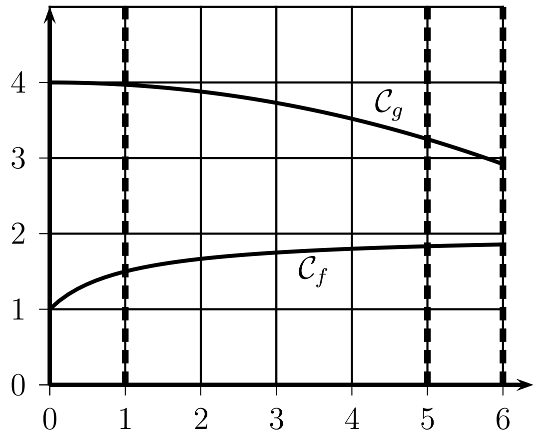
Exercice 11.36

Calculer les intégrales :

(1) $\displaystyle\int_1^3 \mathrm{e}^x\,dx + \int_3^7 \mathrm{e}^x\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^4 (6x^2+8x)\,dx + \int_4^9 (6x^2+8x)\,dx$ (3) $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x}\,dx + \int_5^8 \frac{1}{x}\,dx$

Exercice 11.37 (Domaine délimité par les courbes de deux fonctions positives.)

Deux fonctions f et g sont représentées graphiquement ci-contre.



1. Les intégrales $\displaystyle\int_1^5 f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_1^5 g(x)\,dx$ sont-elles positives ? Justifier graphiquement.

2. Les fonctions f et g sont définies par : $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x+1}$ et $g(x) = 4 - 0,03x^2$
Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 5$.

11.8 Exercices de type bac

Exercice 11.38

La suite (u_n) est définie par : $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x+1)\,dx$.

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n est positif.

3. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.

4. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\ln(2)}{n+1}$.

5. En déduire la limite de la suite (u_n). Justifier.

Exercice 11.39

La suite (J_n) est définie par : $J_n = \displaystyle\int_1^n \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t}\,dt$.

1. Démontrer que la suite (J_n) est croissante.

2. On définit la suite (I_n) par : $I_n = \displaystyle\int_1^n (t+1)\mathrm{e}^{-t}\,dt$.

a) Justifier que pour tout réel $t \geqslant 1$, on a : $\sqrt{t+1} \leqslant t+1$.

b) En déduire que $J_n \leqslant I_n$

c) Calculer I_n en fonction de n.

d) En déduire que la suite (J_n) est majorée par un nombre réel indépendant de n.

e) Que peut-on en conclure pour la suite (J_n) ?

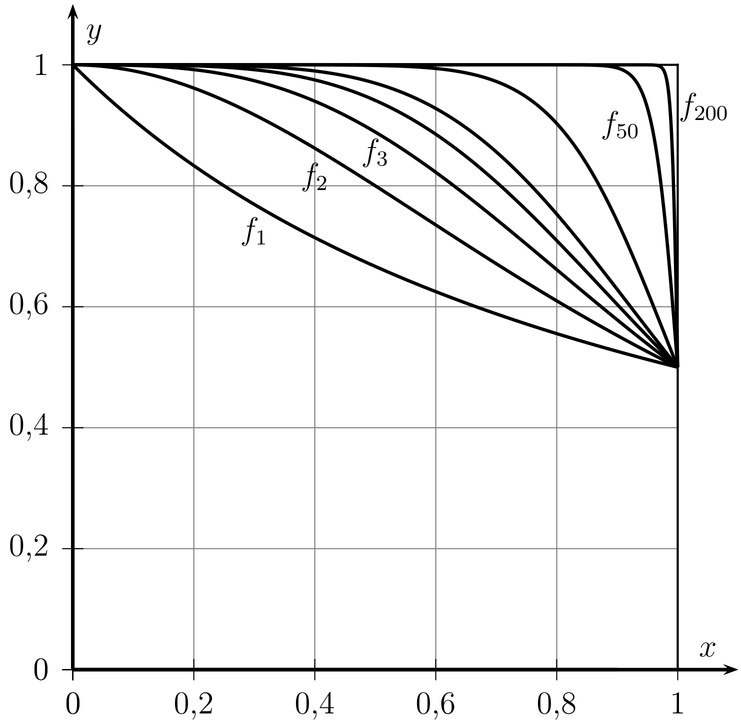
Exercice 11.40 (Bac S, Asie, juin 2014, ex 4)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On note f_n la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit le nombre I_n par $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

1. Les représentations graphiques de certaines fonctions f_n obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracées ci-après.



En expliquant soigneusement votre démarche, conjecturer, pour la suite (I_n) l'existence et la valeur éventuelle de la limite, lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Calculer la valeur exacte de I_1.

3. a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $\dfrac{1}{1+x^n} \leqslant 1$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $I_n \leqslant 1$.

4. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $1 - x^n \leqslant \dfrac{1}{1+x^n}$.

5. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1 - x^n)\ \mathrm{d}x$.

6. À l'aide des questions précédentes, démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

7. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n, p et k sont des entiers naturels x et I sont des réels
Initialisation :	I prend la valeur 0

Traitement :	Demander un entier $n \geqslant 1$
	Demander un entier $p \geqslant 1$
	Pour k allant de 0 à $p-1$ faire :
	    x prend la valeur $\dfrac{k}{p}$
	    I prend la valeur $I + \dfrac{1}{1+x^n} \times \dfrac{1}{p}$
	Fin Pour
	Afficher I

a) Quelle valeur, arrondie au centième, renvoie cet algorithme si l'on entre les valeurs $n = 2$ et $p = 5$?

On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau suivant avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme. Les valeurs de I seront arrondies au millième.

k	x	I
0		
4		

b) Expliquer pourquoi cet algorithme permet d'approcher l'intégrale I_n.

11.9 Pour réviser

Chapitre 8 – Calcul intégral

Les exercices résolus

- ex 1 p 201 : intégrale d'une fonction affine
- ex 9 p 203 : sens de variation d'une fonction définie à partir d'une intégrale
- ex 10 p 203 : vérifier une primitive
- ex 15 et 16 p 205 : calculs de primitives
- ex 20 p 207 : calculer une intégrale
- ex 21 p 207 : calculer une aire avec une intégrale
- ex 26 p 209 : utiliser la propriété de linéarité
- ex 27 p 209 : encadrer une intégrale

Rubrique *Pour s'exercer*, corrigés pages 466-467

- ex 2 p 201 : intégrales de fonctions affines
- ex 11 p 203 : fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(x)\,dx$
- ex 13 p 203 : choisir une primitive parmi plusieurs fonctions possibles
- ex 17 p 205 : déterminer des primitives
- ex 22 p 207 : calculs d'intégrales
- ex 24 p 207 : calculer une aire avec une intégrale
- ex 28 p 209 : calcul d'une intégrale à l'aide d'une propriété
- ex 32 p 209 : encadrer une intégrale

Rubrique *Objectif bac*, corrigés page 475-476

- ex 100 p 215 : QCM
- ex 101 p 215 : Vrai/Faux
- ex 102 p 215 : Vrai/Faux
- ex 103 p 216 : exercice de type bac, étude d'une fonction, encadrement d'une intégrale
- ex 104 p 217 : exercice de type bac, partie A, question de cours, partie B, étude d'une suite
- ex 105 p 217 : intégrale et suite

II Cours

11.1 Méthode des rectangles

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ représentée graphiquement par une courbe $\mathscr{C}$ (figure en bas à droite).

La méthode des rectangles a pour but de calculer une valeur approchée de l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan comprise entre

- la courbe $\mathscr{C}$;
- l'axe des abscisses ;
- les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$.

Pour un entier naturel n, on partage l'intervalle $[a\ ;\ b]$ en n petits intervalles de largeur $\dfrac{b-a}{n}$.

Ces n petits intervalles successifs sont donc

$$\left[a\ ;\ a+1\times\frac{b-a}{n}\right],\ \left[a+1\times\frac{b-a}{n}\ ;\ a+2\times\frac{b-a}{n}\right],\ \dots,\ \left[a+(n-1)\times\frac{b-a}{n}\ ;\ a+n\times\frac{b-a}{n}\right].$$

Pour continuer, il est plus commode de poser $x_k = a + k \times \dfrac{b-a}{n}$, ainsi nos intervalles s'écrivent $[x_0\ ;\ x_1]$, $[x_1\ ;\ x_2]$, … , $[x_{n-1}\ ;\ x_n]$

Pour chaque intervalle $[x_k\ ;\ x_{k+1}]$ on calcule l'aire du rectangle de largeur $\dfrac{b-a}{n}$ et de hauteur $f(k+1)$, et on ajoute les aires de ces rectangles.

Écrivons la somme S_n des aires de ces n rectangles.

$$S_n = \frac{b-a}{n}\times f(x_1) + \frac{b-a}{n}\times f(x_2) + \cdots + \frac{b-a}{n}\times f(x_n)$$

$$S_n = \frac{b-a}{n}\times\big(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\big)$$

$$S_n = \frac{b-a}{n}\times\left(f\left(a+1\times\frac{b-a}{n}\right)+f\left(a+2\times\frac{b-a}{n}\right)+\cdots+f\left(a+n\times\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

Lorsque n devient très grand, on obtient une bonne valeur approchée de l'aire $\mathscr{A}$.

Le problème est que lorsque n devient très grand, les calculs sont trop longs et il faut utiliser un programme qui calcule cette somme pour une valeur donnée de n. On peut par exemple programmer l'algorithme ci-dessous.

Algorithme

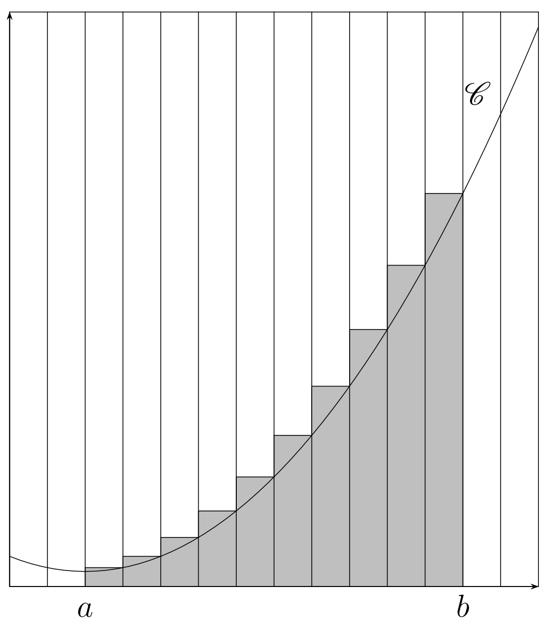
Entrées : a, b, n

$s \leftarrow 0$

Pour des valeurs de k allant de 1 à n, de 1 en 1

> $r \leftarrow \dfrac{b-a}{n}\times f\left(a+k\times\dfrac{b-a}{n}\right)$
>
> $s \leftarrow s + r$
>
> Fin de la boucle "pour"

Sortie : s



11.2 Intégrale d'une fonction continue et positive

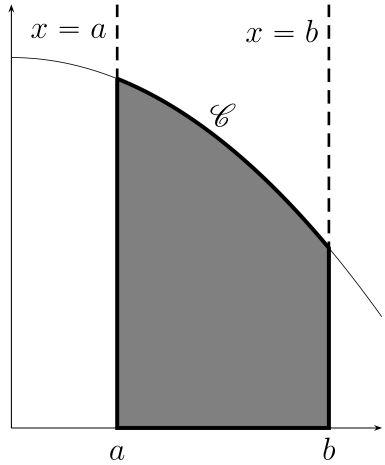
Définition 11.1 (Aire sous une courbe)

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ représentée graphiquement par une courbe $\mathscr{C}$.

L'intégrale de la fonction f sur intervalle $[a\ ;\ b]$ qui s'écrit $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, est l'aire, **exprimée en unités d'aire**,

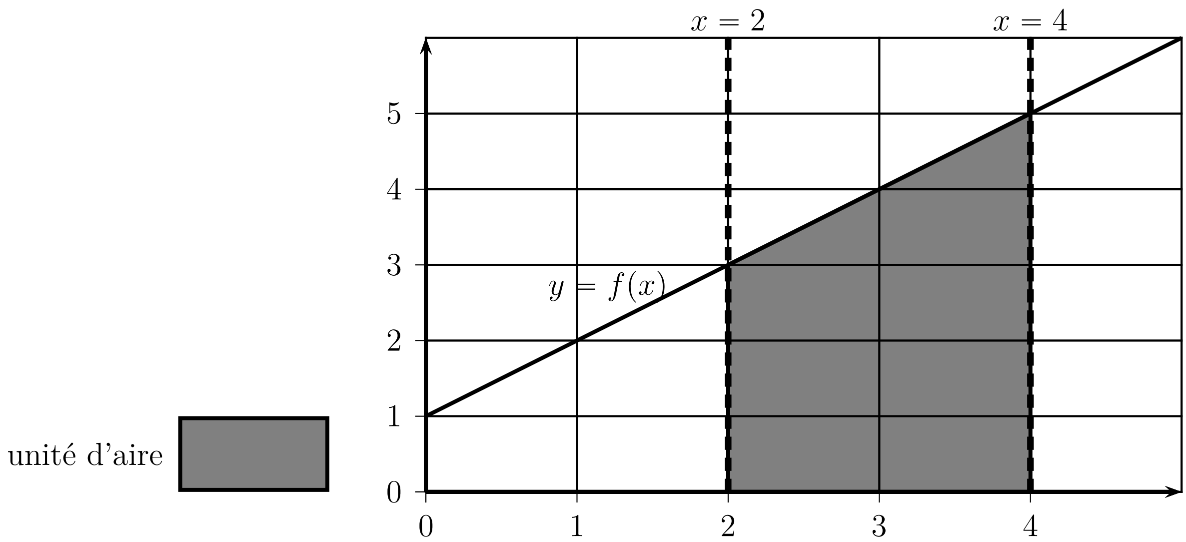
de la partie du plan comprise entre

- la courbe $\mathscr{C}$;
- l'axe des abscisses ;
- les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$.



Exemple : intégrale d'une fonction affine

La fonction f est définie par $f(x) = x + 1$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$. Elle est représentée graphiquement ci-dessous et l'intégrale $\displaystyle\int_2^4 (x+1)\,dx$ est égale à l'aire grisée en unités d'aire soit $\boxed{\text{8 unités d'aire}}$.



11.3 Théorème fondamental pour une fonction continue, positive

Propriété 11.1

Si f est continue et positive sur $[a, b]$, la fonction F définie sur $[a, b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a, b]$ et sa dérivée est f : $F' = f$.

Exemple : exercice sur fiche n° 11.9

$f(t) = 2t + 1$

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt = \frac{(x-1)(f(1)+f(x))}{2} = \frac{(x-1)(2x+4)}{2} = x^2 + x - 2$$

$F'(x) = 2x + 1 = f(x)$

▣ Démonstration lorsque F est une fonction continue, positive et croissante

Nous savons que si une fonction F est dérivable en x, la définition de $F'(x)$ est :

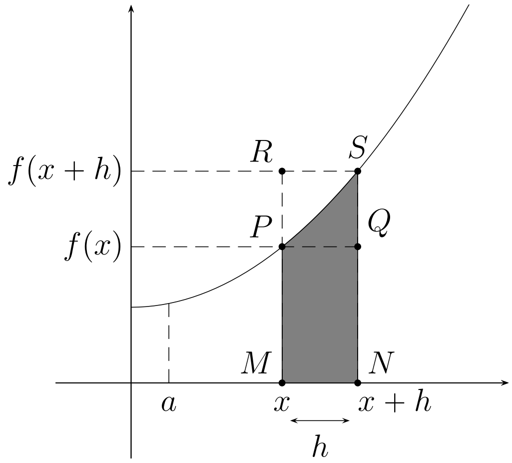
$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\right)$$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\times\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

➜ Étudions d'abord le cas où $h > 0$. Dans ce cas $x < x+h$.

On sait que la fonction f est croissante, donc sur l'intervalle $[x\ ;\ x+h]$, on a : $f(x) \leqslant f(t) \leqslant f(x+h)$.

L'intégrale $\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ c'est à dire l'aire grisée est comprise entre les aires de rectangles $MPQN$ et $MRSN$ sur la figure,
or : aire $(MNPQ) = h \times f(x)$,
et : aire $(MRSN) = h \times f(x+h)$.



On a donc l'encadrement :

$$h\times f(x) \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant h\times f(x+h)$$

Donc : $\dfrac{1}{h}\times h\times f(x) \leqslant \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant \dfrac{1}{h}\times h\times f(x+h)$

Soit finalement : $f(x) \leqslant \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant f(x+h)$

Autrement dit : $f(x) \leqslant \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} \leqslant f(x+h)$

Lorsque h tend vers 0, $f(x+h)$ tend vers $f(x)$ parce que f est continue, donc d'après l'encadrement ci-dessus, et d'après le théorème des gendarmes, $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}$ tend vers $f(x)$.

On a donc $\displaystyle\lim_{h\to 0}\left(\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\right) = f(x)$ c'est à dire $F'(x) = f(x)$

➜ Expliquons brièvement le cas où $h < 0$. Dans ce cas $x+h < x$.

On démontre que : $f(x+h) \leqslant \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} \leqslant f(x)$

puis on fait tendre h vers zéro et en utilisant le théorème des gendarmes, on démontre de même que $F'(x) = f(x)$.

11.4 Primitives

11.4.a Définition et propriétés de primitive d'une fonction

Définition 11.2

Soit deux fonctions f et F définies sur un intervalle I.
Dire que F est une primitive de f sur I signifie que f est la dérivée de F sur I, c'est à dire $\mathrm{F}' = f$

Exemple

Soit la fonction F définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}(x) = x^2 + 3x$

et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 3$.

Pour tout nombre x de $\mathbb{R}$, $\mathrm{F}'(x) = f(x)$

f est la dérivée de F sur $\mathbb{R}$ donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Propriété 11.2

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
Alors
- la fonction f admet une infinité de primitives
- toute primitive de f est de la forme $x \longmapsto \mathrm{F}(x) + c$, où c est un nombre réel.

Exemple

On reprend les fonctions f et F de l'exemple précédent.

Les fonctions F_2 et F_3 définies par $\mathrm{F}_2(x) = x^2 + 3x + 5$ et $\mathrm{F}_3(x) = x^2 + 3x - 4$

sont des primitives de f, en effet, pour tout nombre x de $\mathbb{R}$,

$\mathrm{F}_2'(x) = 2x + 3 = f(x)$ et $\mathrm{F}_3'(x) = 2x + 3 = f(x)$

et pour nombre x de $\mathbb{R}$, on a $\mathrm{F}_2(x) = \mathrm{F}(x) + 5$ et $\mathrm{F}_3(x) = \mathrm{F}(x) - 4$

Propriété 11.3 (Fonction continue et primitive)

Toute fonction continue définie sur un intervallle $[a\ ;\ b]$ admet des primitives sur cet intervalle.

Démonstration

Nous avons démontré au paragraphe 11.3 que pour une fonction f continue, positive et croissante, la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f $(F' = f)$, et nous l'avons admis pour une fonction continue et positive.

Si f est une fonction continue sur $[a\ ;\ b]$, elle admet un minimum m sur $[a\ ;\ b$, autrement dit, pour tout réel x de $[a\ ;\ b]$, $f(x) \geqslant m$, et par conséquent $f(x) - m \geqslant 0$.

Posons alors : $g(x) = f(x) - m$ et ainsi $g(x) \geqslant 0$.

La fonction g est par conséquent positive et continue sur $[a\ ;\ b]$, puisque f est continue sur $[a\ ;\ b]$.

On définit alors : $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)dt$ et on sait que G est une primitive de g d'après la propriété du paragraphe 11.3.

Posons maintenant : $F(x) = G(x) + mx$ Ainsi : $F'(x) = G'(x) + m = (f(x) - m) + m = f(x)$

On a donc déterminé une primitive de f, et on sait que toutes les fonctions de la forme $F + k$, où k est une constante, sont des primitives de f.

11.4.b Détermination de primitives

La propriété et les deux tableaux ci-dessous sont utiles pour déterminer des primitives. On les obtient en lisant des tableaux de dérivation « à l'envers ».

Propriété 11.4

Soient U et V des primitives respectives des fonctions u et v sur un intervalle I, et k un nombre réel.
Alors U + V est une primitive de $u+v$ sur I et kU est une primitive de ku sur I

Tableau 1

Dans le tableau ci-dessous :
f désigne une fonction définie sur un intervalle I, F est une primitive de f, et c est une constante.

$f(x)$	$F(x)$	I
k constante	$kx+c$	$\mathbb{R}$
x	$\dfrac{x^2}{2}+c$	$\mathbb{R}$
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln x+c$	$]-\infty\ ;\ 0[$ ou $]0\ ;\ +\infty[$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x}+c$	$]-\infty\ ;\ 0[$ ou $]0\ ;\ +\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$]0\ ;\ +\infty[$
e^x	e^x+c	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{ax+b}$ $(a\neq 0)$	$\dfrac{1}{a}\ln(ax+b)+c$	$]-\infty\ ;\ -\dfrac{b}{a}[$ ou $]-\dfrac{b}{a}\ ;\ +\infty[$
e^{ax+b} $(a\neq 0)$	$\dfrac{1}{a}e^{ax+b}+c$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$

Tableau 2

Dans ce tableau, u est une fonction dérivable sur un intervalle I, et n est un nombre entier.

Fonctions	Primitives
$u'u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln u$
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$u'e^u$	e^u

Remarque : il arrive que pour une fonction donnée, on ne puisse pas déterminer une primitive à l'aide des fonctions de références, par exemple la fonction définie par $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ [1]

Déterminer une primitive avec la calculatrice TI 89

Par exemple une primitive de la fonction définie par $f(x)=x^2$ est la fonction définie par $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$

Appuyer sur les touches $\boxed{\text{HOME}}$ $\boxed{\text{F3}}$

Dans le menu déroulant, choisir : `2:∫ integrate` puis compléter ainsi : `∫(x^2,x)`

Déterminer une primitive avec GeoGebra

Reprenons l'exemple précédent : une primitive de la fonction définie par $f(x)=x^2$ est la fonction définie par $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$

Ouvrir GeoGebra.

1. On retrouvera cette fonction dans le chapitre de probabilité « Loi à densité ».

Cliquer sur le menu *Affichage*, puis sur *Calcul formel*, et fermer les autres fenêtres.

Cliquer dans la ligne numérotée 1, et saisir « Intégrale ».

On voit une liste, choisir Intégrale[<Fonction>, <Variable>]

Compléter ainsi : Intégrale[x^2, x]

Appuyer sur $\boxed{\text{Entrer}}$

Le résultat s'affiche en dessous : $\mathbf{\frac{1}{3}\,x^3 + c_1}$

11.5 Intégrale d'une fonction

11.5.a Formule fondamentale pour une fonction continue et positive

Pour une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, on a défini au paragraphe 11.1 l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ comme une aire sous la courbe de f.

On a vu aussi que f admet des primitives sur $[a\ ;\ b]$. Soit F une de ces primitives.

On sait aussi que la fonction définie par $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f.

Comme F et G sont des primitives de f sur $[a\ ;\ b]$, on sait qu'il existe une constante k telle que $F(x) = G(x) + k$.

Remplaçons alors x par a, on a alors : $F(a) = G(a) + k = \displaystyle\int_a^a f(t)dt + = 0 + k = k$, donc $k = F(a)$.

Donc, pour tout réel x de $[a\ ;\ b]$, on a $F(x) = G(x) + F(a)$, autrement dit $G(x) = F(x) - F(a)$.

En remplaçant maintenant x par b, on obtient $G(b) = F(b) - F(a)$, c'est à dire $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)}$.

Exemple 1

Reprenons la fonction affine donnée en exemple au début de ce cours, au paragraphe 11.2 et calculons l'intégrale $\displaystyle\int_2^4 (x+1)\,dx$ avec la formule de la définition 11.3.

$f(x) = x + 1$ On détermine une primitive de f : $\mathrm{F}(x) = \dfrac{x^2}{2} + x$

Ainsi : $\displaystyle\int_2^4 (x+1)\,dx = \mathrm{F}(4) - \mathrm{F}(2) = \left(\frac{4^2}{2} + 4\right) - \left(\frac{2^2}{2} + 2\right) = \frac{16}{2} + 4 - \frac{4}{2} - 2 = \boxed{8}$.

Exemple 2

Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_1^3 \mathrm{e}^x\,dx$.

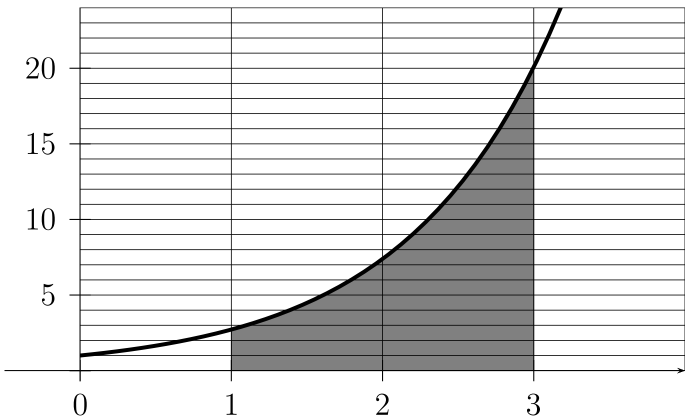
On a : $f(x) = \mathrm{e}^x$

On détermine une primitive de f : $\mathrm{F}(x) = \mathrm{e}^x$

Ainsi :

$\displaystyle\int_1^3 (x+1)\,dx = \mathrm{F}(3) - \mathrm{F}(1)$.

$\displaystyle\int_1^3 (x+1)\,dx = \boxed{\mathrm{e}^3 - \mathrm{e}} \approx 17,37$



11.5.b Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

On étend la formule fondamentale du paragraphe précédent aux fonctions continues de signe quelconque, d'où la définition et la formule ci-dessous.

Définition 11.3 (Formule fondamentale)

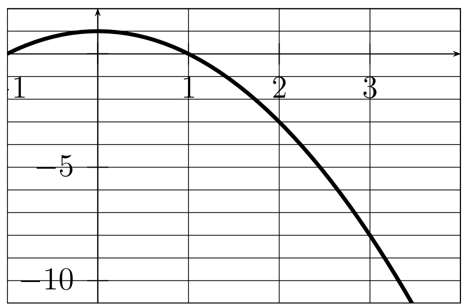
Si F est une primitive d'une fonction f sur un intervalle I, et si a et b sont deux nombres de cet intervalle, on appelle intégrale de a à b de f l'expression $F(b) - F(a)$.

On écrit : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Exemple

Calculons $\displaystyle\int_0^3 (1-x^2)\,dx$ $\qquad f(x) = 1-x^2$ $\qquad \mathrm{F}(x) = x - \dfrac{x^3}{3}$

$$\int_0^3 (1-x^2)\,dx = \mathrm{F}(3) - \mathrm{F}(0) = \left(3 - \frac{3^3}{3}\right) - \left(0 - \frac{0^3}{3}\right) = \boxed{-3}.$$



Remarque

Comme le montre l'exemple ci-dessus, l'intégrale d'une fonction de signe quelconque n'est pas toujours positive, et si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est négative, que représente le résultat par rapport à l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_1$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$?

Nous allons donc étudier
- le cas d'une intégrale d'une fonction continue de signe constant sur un intervalle $[a\ ;\ b]$;
- le cas d'une intégrale d'une fonction continue de signe quelconque.

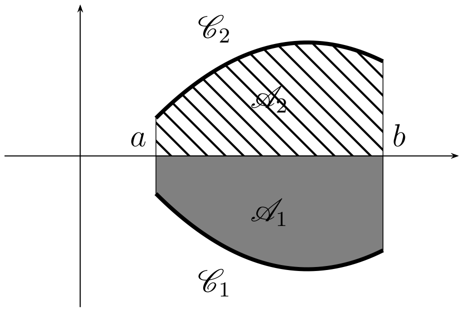
■ Intégrale d'une fonction de signe constant

Une fonction continue de signe constant sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ est soit positive sur $[a\ ;\ b]$, et ce cas a déjà été étudié, soit négative sur $[a\ ;\ b]$, et ce cas est étudié ci-dessous..

▸ Intégrale d'une fonction continue négative

Soit f est une fonction continue négative sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, représentée ci-dessous par la courbe $\mathscr{C}_1$.

On appelle $\mathscr{A}_1$ l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_1$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$, partie grisée sur la figure ci-dessous.



Puisque f est une fonction continue négative sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, alors une primitive F de f est décroissante sur $[a\ ;\ b]$, puisque $F' = f$, or $a \leqslant b$, donc $F(a) \geqslant F(b)$, par conséquent $F(b) - F(a) \leqslant 0$, c'est dire $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0$.

L'intégrale d'une fonction continue négative est donc négative, mais quel est le lien entre ce résultat négatif et l'aire $\mathscr{A}_1$?

Considérons maintenant la courbe $\mathscr{C}_2$ de la fonction $-f$ sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$. Attention, la fonction $-f$ est positive puisque f est négative.

On appelle $\mathscr{A}_2$ l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_2$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$,

Les deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses, par conséquent les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont égales.

Justifions maintenant par un calcul que les intégrales de f et de $-f$ sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ sont opposées. Pour cela, calculons l'intégrale de $-f$. Il nous faut donc une primitive de $-f$ qui est $-F$.

$$\int_a^b \big(-f(x)\big)\,dx = \big(-F(b)\big) - \big(-F(a)\big) = -F(b) + F(a) = -\big(F(b) - F(a)\big) = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Donc les intégrales de f et de $-f$ sur le même intervalle sont opposées, et pour les aires, on a :

$$\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2 = \int_a^b \big(-f(x)\big)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

▸ **Conclusion pour l'intégrale d'une fonction continue de signe constant**

Nous savions donc que pour une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$, est égale à $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Nous venons de justifier que pour une fonction continue f et négative sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$, est égale à $\displaystyle -\int_a^b f(x)\,dx$.

Nous obtenons donc la propriété ci-dessous.

Propriété 11.5 (Intégrale d'une fonction de signe constant)

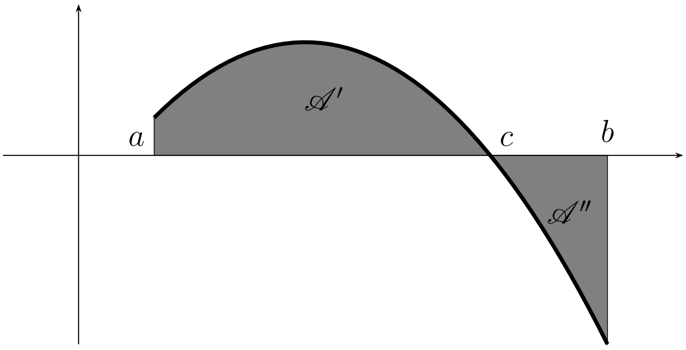
Pour une fonction continue f et de signe constant sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$, est égale à $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$.

■ Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Une fonction continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ n'est pas forcément positive sur $[a\ ;\ b]$ ou négative sur $[a\ ;\ b]$, elle peut changer de signe sur $[a\ ;\ b]$.

Considérons par exemple un nombre c compris entre a et b, une fonction f continue sur $[a\ ;\ b]$, positive sur $[a\ ;\ c]$, et négative sur $[c\ ;\ b]$, et nommons les aires suivantes :

- $\mathscr{A}'$ l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = c$,
- $\mathscr{A}''$ l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = c$ et $x = b$.



On peut décomposer l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ en la somme de deux intégrales en écrivant le calcul ci-dessous.

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(b) - F(c) + F(c) - F(a) = \int_c^b f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx$

Donc : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Or, f est positive sur $[a\ ;\ c]$, donc $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx = \mathscr{A}'$,

et f est négative sur $[c\ ;\ b]$, donc $\displaystyle\int_c^b f(x)\,dx = -\mathscr{A}''$.

Donc : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \mathscr{A}' - \mathscr{A}''$.

Ainsi, dans ce cas l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ n'est pas égale à la somme des aires $\mathscr{A}'$ et $\mathscr{A}''$ mais égale à leur différence.

Par conséquent la somme des aires $\mathscr{A}'$ et $\mathscr{A}''$, s'obtient ainsi : $\displaystyle\mathscr{A}' + \mathscr{A}'' = \int_a^c f(x)\,dx + \left|\int_c^b f(x)\,dx\right|$

11.5.c Utilisation des calculatrices

Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_2^4 (x+1)\,dx$ à l'aide de la calculatrice.

TI 82

Appuyer sur les touches $\boxed{\text{math}}$ $\boxed{9}$. On obtient l'affichage : `fonctIntégr(`

Compléter ainsi : `fonctIntégr(X+1,X,2,4)`

TI 89

Touches $\boxed{\text{HOME}}$ (F3)(Calc) choisir `2:∫( integrate`

Compléter ainsi : `∫(x+1,x,2,4)`

CASIO

Touche $\boxed{\text{MENU}}$, choisir RUN touches $\boxed{\text{OPTN}}$ $\boxed{\text{F4}}$ (CALC) $\boxed{\text{F4}}$ (∫dX)

Compléter ainsi : $\displaystyle\int_2^4 \mathsf{X{+}1}\,\mathrm{d}x$

11.5.d Utilisation de GeoGebra

Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_2^4 (x+1)\,dx$ à l'aide de GeoGebra.

Cliquer sur le menu *Affichage*, puis sur *Calcul formel.*

Fermer les autres fenêtres.

Cliquer dans la ligne numérotée 1, et saisir « Intégrale ».

On voit une liste, choisir Intégrale[<Fonction>, <x min>, <x max>]

Compléter ainsi : Intégrale[x+1, 2, 4]

Appuyer sur Entrer

Le résultat exact s'affiche en dessous.

11.6 Valeur moyenne d'une fonction

Définition 11.4

Soient a et b deux nombres tels que $a < b$ et une fonction f admettant une primitive sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$. La valeur moyenne de f sur $[a\ ;\ b]$ est le nombre $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

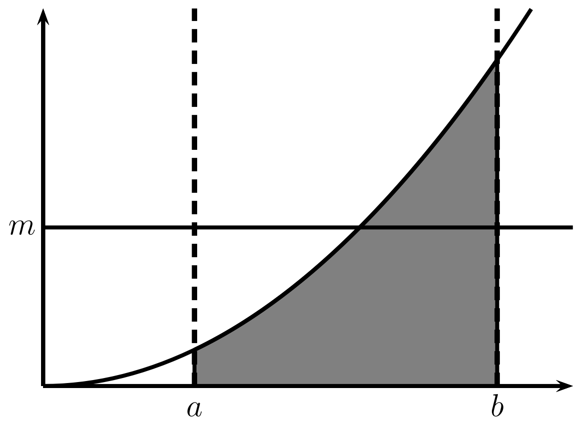
Remarque

Si on appelle m cette valeur moyenne, on a l'égalité

$m = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

donc $\quad m \times (b-a) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

Donc pour une fonction f positive, cela signifie graphiquement que l'aire du rectangle de largeur $b-a$ et de hauteur m est égale à $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.



11.7 Propriétés de l'intégrale

Propriété 11.6 (Linéarité (1))

Soient f et g deux fonctions admettant chacune une primitive sur un intervalle I, et a et b deux nombres de cet intervalle.
alors : $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

Propriété 11.7 (Linéarité (2))

Soient f une fonction admettant une primitive sur un intervalle I, et a et b deux nombres de cet intervalle.
alors : $\displaystyle\int_a^b (k \times f(x))\,dx = k \times \int_a^b f(x)\,dx$.

Propriété 11.8 (Signe d'une intégrale)

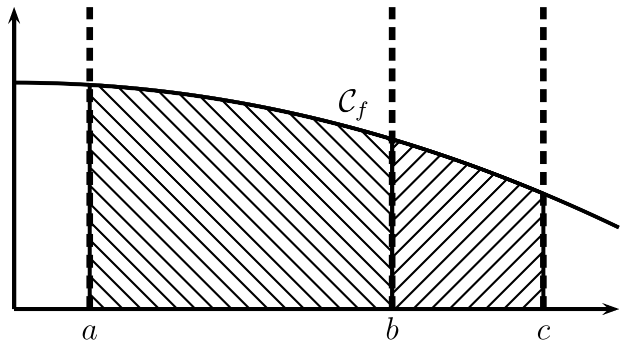
Soient f une fonction admettant une primitive sur un intervalle I, et a et b deux nombres de cet intervalle.

- Si $f \geqslant 0$ sur l'intervalle I, et si $a \leqslant b$ alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.
- Si $f \leqslant 0$ sur l'intervalle I, et si $a \leqslant b$ alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0$.

Propriété 11.9 (Relation de Chasles)

Soient f une fonction admettant une primitive sur un intervalle I, et a, b, c trois nombres de cet intervalle, alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$.

Remarque – Interprétation pour les aires
Pour une fonction f positive, si $a \leqslant b \leqslant c$, la relation de Chasles traduit le fait que les aires s'ajoutent comme on le voit sur la figure ci-contre.



Chapitre 12

Repères de l'espace

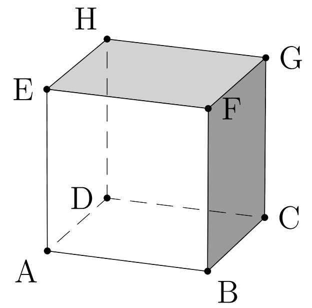
I Exercices

12.1 Vecteurs de l'espace

Exercice 12.1

ABCDEFGH est le cube représenté ci-dessous.

1. **a)** Sur la figure ci-contre, construire le point I tel que $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{HE}$.
   b) Quelle est la nature du quadrilatère $EHBI$?
2. Construire le point J tel que $AGJE$ soit un parallélogramme.

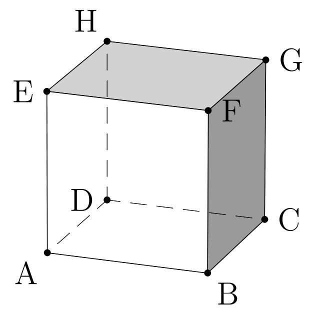


Exercice 12.2

ABCDEFGH est le cube représenté ci-dessous.

On admettra les égalités de vecteurs correspondant aux arêtes, comme par exemple :
$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF}$

1. Compléter :
   $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AE} + \ldots = \overrightarrow{A\ldots}$
   $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BD} = \ldots + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{\ldots D}$
   $\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CH} + \ldots = \overrightarrow{C\ldots}$
   $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AF} = \ldots + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{\ldots F}$
2. Construire les points I, J, K tel que
   $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EI}$ $\quad$ $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{GJ}$ $\quad$ $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{FK}$



Exercice 12.3

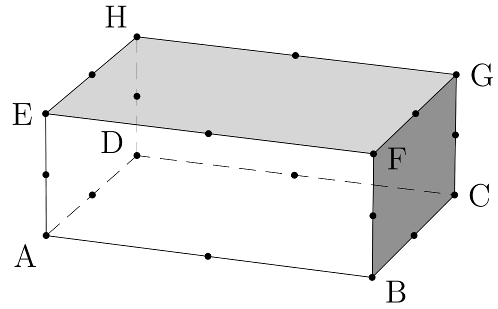
ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-dessous. Les milieux de toutes les arêtes ont été marqués.

Construire les points I, J, K tel que

$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BF}$

$\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$

$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$



12.2 Plan défini par un point et deux vecteurs non colinéaires.

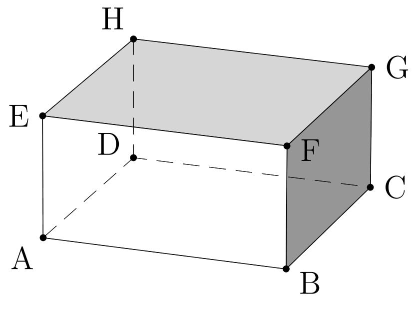
Exercice 12.4

ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre. ci-dessous

1. Construire les points I, J, K, L tel que

   $\overrightarrow{EI} = 2\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EG}$ $\quad$ $\overrightarrow{EJ} = -3\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EG}$ $\quad$ $\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{EH} - \overrightarrow{EG}$ $\quad$ $\overrightarrow{EL} = -\overrightarrow{EH} - \overrightarrow{EG}$

2. Où se trouvent tous les points M tel que $\overrightarrow{EM}$ s'écrit sous la forme $x\overrightarrow{EH} + y\overrightarrow{EG}$?



Exercice 12.5

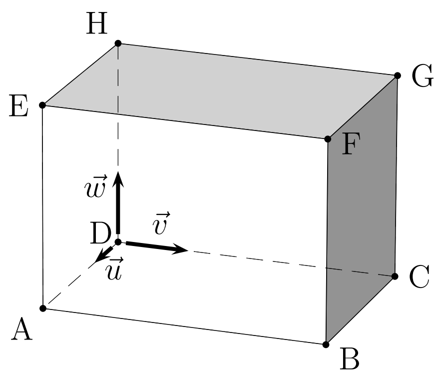
ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont respectivement colinéaires aux vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DH}$ et sont représentés sur la figure.

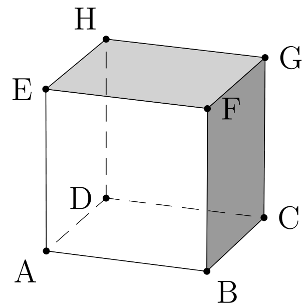
Quelle est chaque fois le plan défini par le point et les deux vecteurs indiqués ? On nommera chaque plan par trois points.

1. H, $\vec{u}$, $\vec{v}$ **2.** C, $\vec{u}$, $\vec{w}$ **3.** A, $\vec{v}$, $\vec{w}$

4. H, $\vec{u}$, $\vec{w}$ **5.** B, $\vec{v}$, $\vec{w}$ **6.** B, $\vec{u}$, $\vec{v}$



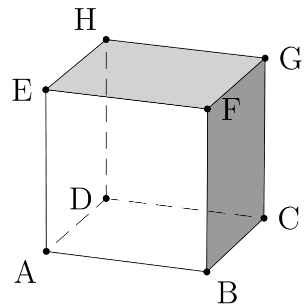
Exercice 12.6
ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.



1. Construire le point I tel que :
 $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$
2. Le point I appartient-il au plan (ABH) ? Justifier.
 On pourra calculer le vecteur $\overrightarrow{AI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$.

Exercice 12.7

ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.



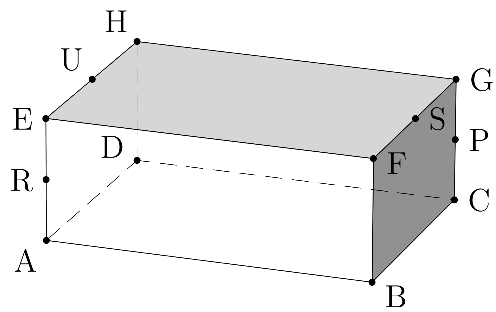
1. Construire le point I tel que :
 $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$
2. Démontrer que : $\overrightarrow{BI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BE}$
3. Le point I appartient-il au plan (BCE) ? Justifier.
 On pourra calculer le vecteur $\overrightarrow{BI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE}$.

12.3 Vecteurs coplanaires

Exercice 12.8

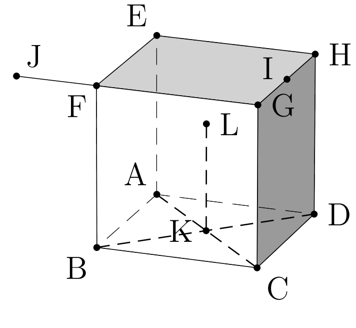
ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-dessous.

R, P, S, U sont les milieux respectifs des arêtes [AE], [CG], [FG], [EH].



1. Indiquer chaque fois sans justifier si les trois vecteurs sont coplanaires ou non.
 a) $\overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{AH}$; $\overrightarrow{AD}$ **b)** $\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{BF}$; $\overrightarrow{BC}$
 c) $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AU}$ **d)** $\overrightarrow{GE}$; $\overrightarrow{GC}$; $\overrightarrow{GR}$
 e) $\overrightarrow{FP}$; $\overrightarrow{FS}$; $\overrightarrow{FB}$
2. Dans chaque cas où les vecteurs sont coplanaires, écrire l'un des trois en fonction des deux autres.

Exercice 12.9
ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.
I, J, K, L sont les points tels que :



- I est le milieu de l'arête $[GH]$;
- $\overrightarrow{FJ} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{FG}$;
- K est le centre du carré $ABCD$;
- $\overrightarrow{KL} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AE}$.

Écrire chacun des vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AL}$, en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$.

Exercice 12.10

ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-dessous.

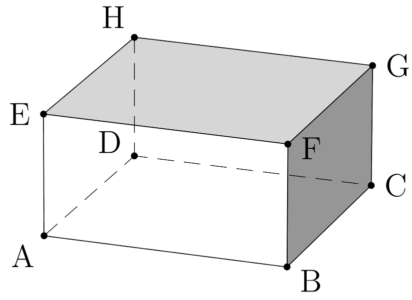
1. Construire les points I et J tel que

$\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

2. Calculer les vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{CJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

3. Les points C, I, J sont-ils alignés ? Démontrer sa réponse.



12.4 Repérage dans l'espace

COURS : *lire la définition d'un repère de l'espace et le vocabulaire des coordonnées au paragraphe 12.4.*

Exercice 12.11

ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté page suivante.

On donne les mesures suivantes : $AB = 4$, $AD = 6$, $AE = 2$

On précise

- que les milieux de toutes les arêtes sont marqués ;
- que les points I, G, H, J sont alignés dans cet ordre et que $IG = 3$ et $HJ = 3$;
- que les points G, C, K sont alignés dans cet ordre et que $CK = 1$.

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont les vecteurs tels que $\vec{u} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ $\quad \vec{v} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AD}$ $\quad \vec{w} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

$(A\ ;\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un repère de l'espace parce que les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont non coplanaires.

Exemple de points et de coordonnées :

$\overrightarrow{AB} = 4\vec{u} + 0\vec{v} + 0\vec{w}$ donc les coordonnées de B dans le repère $(A\ ;\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sont $B(4\ ;\ 0\ ;\ 0)$

$\overrightarrow{AG} = 4\vec{u} + 6\vec{v} + 2\vec{w}$ donc les coordonnées de G dans le repère $(A\ ;\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sont $G(4\ ;\ 6\ ;\ 2)$

Consignes

1. Dans le repère $(A\ ;\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, donner les coordonnées des points D, F, A, I, J, K.

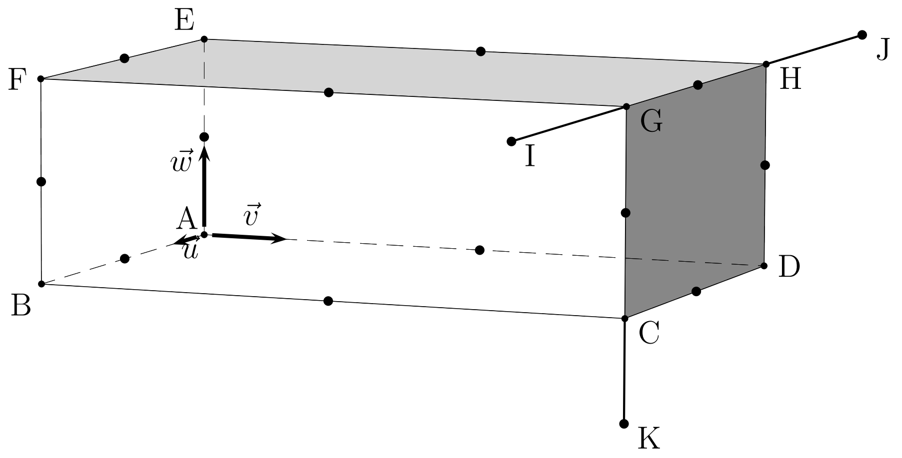
2. Placer les points de coordonnées :

$L(4\ ;\ 3\ ;\ 0)$ $\quad M(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$ $\quad N(2\ ;\ 6\ ;\ 2)$ $\quad P(4\ ;\ 6\ ;\ 1)$ $\quad Q(2\ ;\ 0\ ;\ 2)$

3. Calculer les coordonnées

a) du vecteur $\overrightarrow{DF}$ **b)** du vecteur $\overrightarrow{DJ}$ **c)** du vecteur $2\overrightarrow{DF}$

d) du vecteur $-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DJ}$ **e)** de la somme $\overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{DF}$ **f)** du point R milieu de $[IK]$



Exercice 12.12

Dans le pavé droit ABCDEFGH de l'exercice 12.11, le point S a pour coordonnées $S(-2\ ;\ -3\ ;\ 3)$ dans le repère $(A\ ;\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

1. Donner sans justifier les coordonnées des points C et E.
2. Les points C, E, S sont-ils alignés ? Justifier par des calculs.

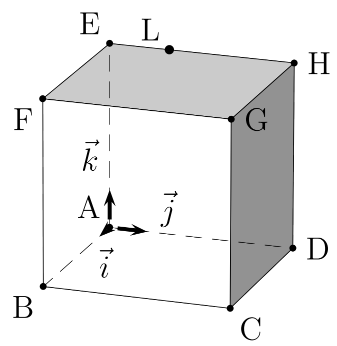
Exercice 12.13

ABCDEFGH est le cube d'arête 4 représenté ci-contre.

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sont les vecteurs tels que :

$\vec{i} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} \quad \vec{j} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD} \quad \vec{k} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AE}$

$(A\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace.



K est le milieu de l'arête $[FG]$, et M est le milieu de $[CH]$.

L est le point du segment $[EH]$ tel que $EL = 1,3$

Le point P est tel que A, D, P sont alignés dans cet ordre et $DP = 4$.

1. Placer les points K, M, P sur la figure.
2. Sans justifier, donner les coordonnées des points B, C, L, F, G, H, P.
3. Calculer les coordonnées des points K et M.
4. **a)** Les points B, K, L semblent-ils alignés ? (tracer une droite sur la figure)

   b) Déterminer par des calculs si les points B, K, L sont alignés ou non.
5. Mêmes consignes a) et b) pour les points F, M, P.

12.5 Représentation paramétrique d'une droite

Exercice 12.14

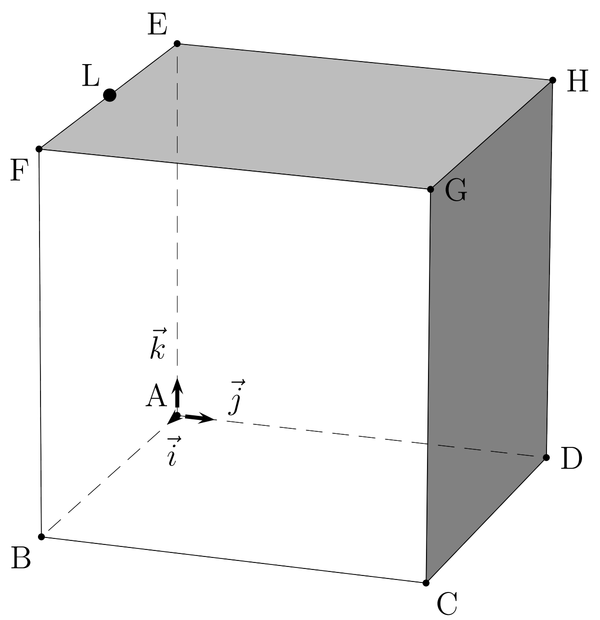
ABCDEFGH est le cube d'arête 8 représenté ci-dessous.

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sont les vecteurs tels que $\vec{i} = \dfrac{1}{8}\overrightarrow{AB}$ $\quad \vec{j} = \dfrac{1}{8}\overrightarrow{AD}$ $\quad \vec{k} = \dfrac{1}{8}\overrightarrow{AE}$.

$(A\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace.

L est le milieu de l'arête $[EF]$ $\quad \vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $\vec{u}(-1\ ;\ 2\ ;\ -2)$

1. Calculer les coordonnées du point L.
2. On considère les points M de l'espace pour lesquels il existe un réel t tel que $\overrightarrow{LM} = t\vec{u}$.
   Quel est le point M
   a) lorsque $t = 0$? **b)** lorsque $t = 4$? Calculer ses coordonnées.
3. Quel est l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M tels que $\overrightarrow{LM} = t\vec{u}$ lorsque t parcourt l'ensemble des réels ?
4. Tracer l'ensemble $\mathscr{E}$ sur la figure.
5. On appelle $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ les coordonnées de M. Écrire x, y, z en fonction de t. Le système formé par ces trois égalités est nommé *la représentation paramétrique de l'ensemble $\mathscr{E}$*.



Exercice 12.15

Dans cet exercice, on utilise le cube et le repère de l'exercice 12.14.

1. Quelles sont les coordonnées de C ?
2. Placer le point P milieu de l'arête $[EH]$, et calculer ses coordonnées.
3. **a)** Tracer la droite (CP).
   b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CP).
4. Le point $Q(-8\ ;\ 0\ ;\ 16)$ appartient-il à la droite (CP) ? Justifier par des calculs.
5. Même question pour le point $R(3\ ;\ 6\ ;\ 4)$.

Exercice 12.16

Dans cet exercice, on utilise le cube et le repère de l'exercice 12.14.

La représentation paramétrique d'une droite (Δ) est : $\begin{cases} x = 8 - 2t \\ y = 0 \\ z = 2t \end{cases}$

1. Donner les coordonnées d'un point et d'un vecteur directeur de cette droite.
2. Calculer les coordonnées du point de cette droite tel que $t = 4$. Quel est ce point ?
3. Tracer la droite (Δ).

Exercice 12.17

$(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace. Donner une représentation paramétrique de chaque axe du repère : (Ox), (Oy), (Oz).

Exercice 12.18

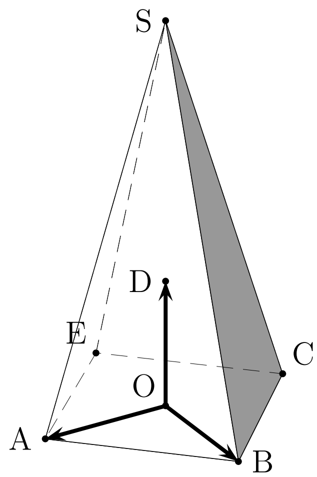
La représentation paramétrique d'une droite (d) est : $\begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = -9t \\ z = -2 + 15t \end{cases}$

1. a) Le point B de coordonnées $B(-3\ ;\ 6\ ;\ -12)$ appartient-il à la droite (d) ? Justifier par des calculs.
   b) Même question pour le point $C(7\ ;\ -8\ ;\ 14)$.
2. a) Le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $\vec{v}(2\ ;\ -3\ ;\ 7)$ est-il un vecteur directeur de la droite (d) ? Justifier par des calculs.
   b) Même question pour le vecteur $\vec{w}(10\ ;\ -15\ ;\ 25)$
3. Donner une représentation paramétrique de la droite (d) différente de celle de l'énoncé.

Exercice 12.19

Dans l'espace, on considère une pyramide SABCE à base carrée ABCE de centre O.
Soit D le point de l'espace tel que $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OD}}\right)$ soit un repère orthonormé.
Le point S a pour coordonnées $(0\,;\,0\,;\,3)$ dans ce repère.

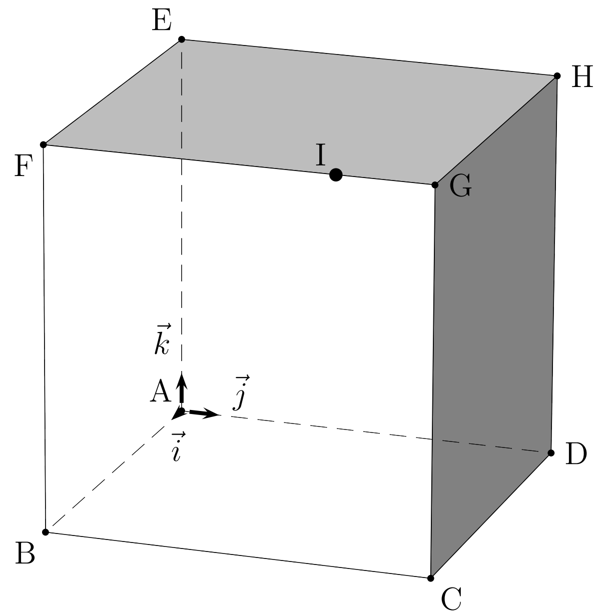
1. Quelle est l'intersection des plans AES et BCS ? Justifier.
2. Tracer cet ensemble sur la figure ci-contre.
3. En déduire une représentation paramétrique de cet ensemble.



12.6 Représentation paramétrique d'un plan

Exercice 12.20

ABCDEFGH est le cube d'arête 8 représenté ci-contre comme dans l'exercice 12.14.
I est le point de coordonnées $I\ (8\ ;\ 6\ ;\ 8)$.



1. Quel est l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M de l'espace pour lesquels il existe des réels t et t' tel que $\overrightarrow{CM} = t\ \overrightarrow{CD} + t'\ \overrightarrow{CI}$?
2. On appelle $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ les coordonnées de M. Écrire x, y, z en fonction de t et t'.

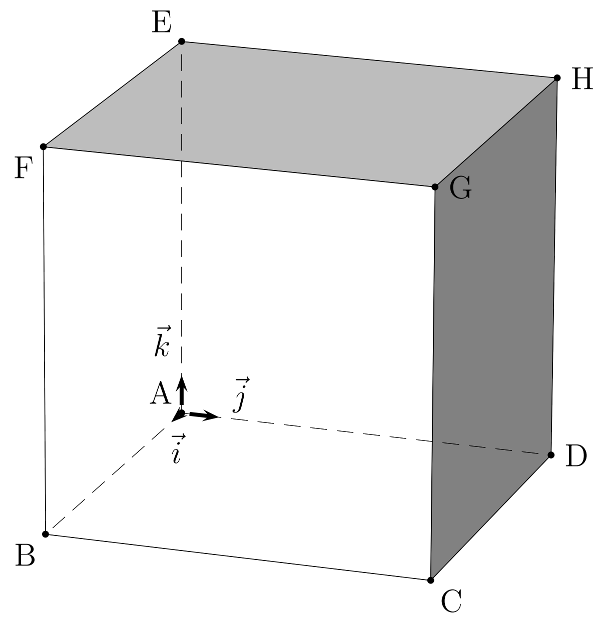
   Le système formé par ces trois égalités est nommé *la représentation paramétrique de l'ensemble* $\mathscr{E}$.

Exercice 12.21

1. Sur la figure de l'exercice 12.20, placer le point $J\ (8\ ;\ 2\ ;\ 8)$.
2. Déterminer une représentation paramétrique du plan (ABJ).

Exercice 12.22

ABCDEFGH est le cube d'arête 8 représenté ci-contre comme dans les exercices précédents.
La représentation paramétrique d'un plan $(\mathscr{P})$ est : $\begin{cases} x = 8 - 2t' \\ y = 8 - t \\ z = 2t + 2t' \end{cases}$



1. Donner les coordonnées d'un point et de deux vecteurs directeurs de ce plan.
2. Calculer les coordonnées du point L de cette droite tel que $t = 4$ et $t' = 0$.

   Placer le point L sur la figure.
3. Calculer les coordonnées du point de cette droite tel que $t = 0$ et $t' = 4$.

   Quel est ce point ?
4. Quel est le plan $(\mathscr{P})$?

   Répondre en le nommant par trois points.
5. Tracer la section du cube par le plan $(\mathscr{P})$.

12.7 Positions relatives de droites

Exercice 12.23

1. **1.** Pour deux droites dans l'espace, rappeler quelles sont les différentes positions relatives possibles de ces deux droites.
2. **2.** Deux droites ont des vecteurs directeurs colinéaires.

   a) Quelles sont les positions relatives possibles de ces deux droites ?

   b) Quelles sont les positions relatives de ces deux droites
   - si ces deux droites ont un point en commun ?
   - si ces deux droites n'ont pas de point en commun ?
3. **3.** Deux droites ont des vecteurs directeurs non colinéaires.

   a) Quelles sont les positions relatives possibles de ces deux droites ?

   b) Quelles sont les positions relatives de ces deux droites
   - si ces deux droites ont un point en commun ?
   - si ces deux droites n'ont pas de point en commun ?

Exercice 12.24

Des représentations paramétriques des droites (d_1) et (d_2) sont : $(d_1)\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = \quad -t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ $\qquad (d_2)\begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = 3 - 2t \\ z = -4 + 5t \end{cases}$

1. **1. Vecteurs directeurs colinéaires ou non**
   Déterminer un vecteur directeur de chaque droite et vérifier si ces deux vecteurs sont colinéaires ou non.
2. **2. Point en commun ou non**
   Vérifier si ces deux droites ont un point en commun, pour cela

   a) On écrit le système (S) ci-dessous (on utilise un paramètre différent pour chaque droite).

   $$(S)\begin{cases} 1 + 3t &= 2 - 4t' & (1) \\ -t &= 3 - 2t' & (2) \\ 3 + 2t &= -4 + 5t' & (3) \end{cases}$$

   b) On résout le système formé par deux équations de ce système :
   - s'il n'y a pas de solution, le système (S) n'a pas de solution,
     dans ce cas les deux droites n'ont aucun point en commun ;
   - si on obtient des solutions t et t', on remplace ces solutions dans la 3^e équation ;
     - si ces solutions sont aussi solutions de la 3e équation,
       il y a un point commun aux deux droites,
       et on calcule ses coordonnées x, y, z en remplaçant t ou t' par sa valeur ;
     - sinon les deux droites n'ont aucun point en commun.
3. **3. Conclusion**
   Quelles sont les positions relatives des droites (d_1) et (d_2) ?

Exercice 12.25

On considère les droites (d_1) et (d_2) de l'exercice 12.24 et les droites (d_3) et (d_4) dont des représentations paramétriques sont :

$$(d_3)\begin{cases} x = 6t \\ y = 2-2t \\ z = 1+4t \end{cases} \qquad (d_4)\begin{cases} x = 3+t \\ y = 2-t \\ z = t \end{cases}$$

Déterminer les positions relatives des droites : **1.** (d_1) et (d_3) **2.** (d_2) et (d_4)

On procédera comme dans l'exercice 12.24 c'est à dire

- vérifier si les vecteurs directeurs sont colinéaires ;
- vérifier si les droites ont un point en commun ou non ;
- conclure.

Exercice 12.26

Récapituler les résultats des exercices 12.24 et 12.25 en complétant chaque case des rangées (1) à (5) par OUI ou NON.

Pour l'intersection, sur la rangée (6), on indiquera s'il s'agit d'une droite, d'un point, ou si l'intersection est vide ($\varnothing$).

		(d_1) et (d_2)	(d_1) et (d_3)	(d_2) et (d_4)
(1)	Confondues ?			
(2)	Strictement parallèles ?			
(3)	Sécantes ?			
(4)	Coplanaires ?			
(5)	Non coplanaires ?			
(6)	Intersection ?			

12.8 Pour réviser

Chapitre 11 – Géométrie vectorielle

Les exercices résolus

- ex 1 p 295 : tétraèdre, calcul vectoriel, centre de gravité d'un triangle.
- ex 8 p 297 : calcul vectoriel, justifier qu'un point appartient à un plan.
- ex 9 p 297 : démonstration du théorème du toit.
- ex 12 p 299 : démontrer que des vecteurs sont coplanaires.
- ex 17 p 301 : coordonnées, droites parallèles.
- ex 18 p 301 : écrire une représentation paramétrique d'une droite.

Rubrique *Pour s'exercer*, corrigés page 468

- ex 3 p 295 : calcul vectoriel dans une pyramide.
- ex 10 p 297 : relation de Chasles, vecteurs, droites dans un cube.
- ex 11 p 297 : calcul vectoriel, droites et plans parallèles.
- ex 13 p 299 : démontrer que des vecteurs sont coplanaires.
- ex 19 p 301 : représentation paramétrique d'une droite

Rubrique *Objectif bac*, corrigés page 477-478

- ex 77 p 307 : QCM
- ex 78 p 307 : Vrai/Faux
- ex 79 p 307 : Vrai/Faux
- ex 80 p 308 : problème de type bac, représentations paramétriques de droites et de plans.
- ex 81 p 309 : pyramide, centre de gravité d'un triangle, points coplanaires, points alignés.
- ex 82 p 309 : alignement, représentations paramétriques d'un plan.

II Cours

12.1 Vecteurs de l'espace

On étend à l'espace la notion de vecteur et les opérations associées.

12.1.a Définition et vecteurs égaux

Définition 12.1

Pour deux points A en B de l'espace,
- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est associé à la translation qui transforme A en B ;
- lorsque A et B sont confondus, le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul.

Propriété 12.1 (Vecteurs égaux et parallélogramme)

Pour quatre points A, B, C, D de l'espace,
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

12.1.b Somme de deux vecteurs.

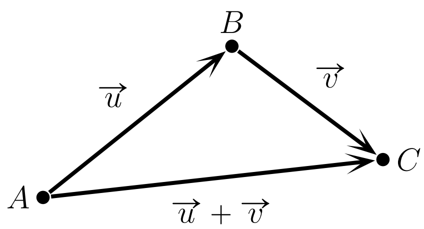
Propriété 12.2 (Relation de Chasles)

Pour trois points A, B, C de l'espace, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

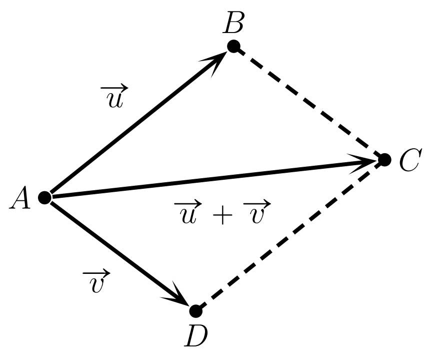
Propriété 12.3 (Règle du parallélogramme)

Pour quatre points A, B, C, D de l'espace, la somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ est égale au vecteur $\overrightarrow{AC}$ tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Relation de Chasles



Règle du pararallélogramme



12.1.c Produit d'un vecteur par un nombre réel

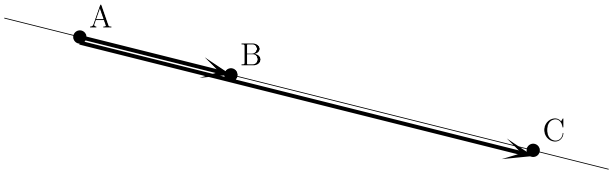
Remarque : si k est positif $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ sont de même sens ; si k est négatif $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ sont de sens opposés.

Définition 12.2 (Vecteurs colinéaires)

Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires signifie que il existe un nombre k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou qu'il existe un nombre k' tel que $\vec{v} = k'\vec{u}$

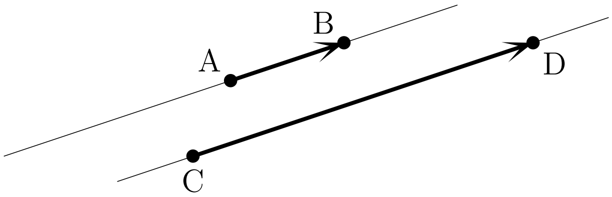
Propriété 12.4 (Alignement et parallélisme)

Trois points A, B, C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.



Propriété 12.5

Pour quatre points A, B, C, D, les droites (AB) et (CD) sont parallèles
si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.



12.1.d Propriétés des opérations

Propriété 12.6

- Pour tout réel λ et pour tout vecteur $\vec{u}$: $\lambda\vec{u} = \vec{0}$. si et seulement si $\lambda = 0$ ou $\vec{u} = 0$
- Pour tout vecteur $\vec{u}$: $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$.
- Pour tous réels λ et λ' et pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,
  $\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$ $\quad (\lambda+\lambda')\vec{u} = \lambda\vec{u} + \lambda'\vec{u}$ $\quad \lambda(\lambda'\vec{u}) = (\lambda\lambda')\vec{u}$

12.2 Plan défini par un point et deux vecteurs non colinéaires.

Propriété 12.7

Pour un point A de l'espace et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on considère les points B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.
Alors l'ensemble des points M pour lesquels il existe des réels x et y tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ est le plan (ABC).

Définition 12.3

Avec les notations de la propriété précédente, le plan (ABC) est appelé le plan défini par le point A et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Définition 12.4 (Vecteurs directeurs d'un plan)

Lorsqu'un plan est défini par le point A et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs de ce plan, ou que ce plan est dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Propriété 12.8

Des plans dirigés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.

Propriété 12.9 (Théorème du toit)

Si deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants selon une droite (Δ), et si (d) et (d') sont deux droites parallèles contenues respectivement dans les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$,
alors la droite (Δ) est parallèle à (d) et à (d').

Démonstration

Le programme de mathématiques de terminale S indique qu'il est intéressant de présenter la démonstration du théorème du toit.

Nommons $\vec{u}$ un vecteur directeur de la droite (Δ), et $\vec{v}$ un vecteur directeur commun aux droites parallèles (d) et (d').

Supposons que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, et démontrons que c'est impossible.

Ce type de démonstration s'appelle une *démonstration par l'absurde.*

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs respectifs des droites (Δ) et (d) qui sont contenues dans le plan $\mathscr{P}$, et comme on a supposé que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires ils sont des vecteurs directeurs du plan $\mathscr{P}$.

De même les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs du plan $\mathscr{P}'$.

Mais d'après la propriété précédente, deux plans sont dirigés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles, donc les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles.

Comme cela est en contradiction avec le fait que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ soient sécants, cela implique que la supposition « $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires » est fausse.

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, donc la droite (Δ) est parallèle à (d) et à (d').

12.3 Vecteurs coplanaires.

Définition 12.5

Dire que trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires signifie que les points A, B, C, D tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$ sont coplanaires.

Dire que les points A, B, C, D sont coplanaires signifie que le point D appartient au plan (ABC), autrement dit, d'après la propriété 12.7 il existe des réels a et b tels que $\overrightarrow{AD} = a\vec{u} + b\vec{v}$, c'est à dire tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

On dit que le vecteur $\vec{w}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On a donc la définition et la propriété ci-dessous.

Définition 12.6 (Combinaison linéaire de vecteurs)

On dit que le vecteur $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$
si et seulement si il existe des réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Propriété 12.10

Trois vecteurs sont coplanaires si, et seulement si, l'un des trois vecteurs est combinaison linéaire des deux autres.

Propriété 12.11 (Décomposition d'un vecteur en fonction de 3 vecteurs non coplanaires)

Pour tout vecteur $\vec{t}$ de l'espace, et pour trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ non coplanaires il existe un unique triplet (x, y, z) tel que $\vec{t} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$.

12.4 Repérage dans l'espace

Définition 12.7 (Repère de l'espace)

Un repère de l'espace est formé d'un point O et de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ non coplanaires. On le note : $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

On sait d'après la propriété du paragraphe 12.3 que pour tout vecteur $\overrightarrow{OM}$ il existe un unique triplet (x, y, z) tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$. On utilise alors le vocabulaire indiqué ci-dessous.

Définition 12.8 (Coordonnées, abscisse, ordonnée, cote)

- Pour un point M tel que : $\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$
  x, y, z sont les coordonnées du point M dans le repère $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
  x, y, z sont nommés respectivement l'abscisse, l'ordonnée et la cote du point M.
- Pour un vecteur $\vec{t}$ tel que $\vec{t} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$, on utilise le même vocabulaire : coordonnées, abscisse, ordonnée, cote du vecteur $\vec{t}$.

Calculs sur les coordonnées

On retrouve les mêmes règles de calculs que dans le plan, avec trois coordonnées au lieu de deux.

La norme d'un vecteur $\vec{u}$ et la distance AB n'apparaissent pas dans les formules ci-dessous et seront abordées dans le chapitre *Produit scalaire dans l'espace*.

Propriété 12.12

- Pour deux vecteurs $\vec{u}(x\ ;\ y\ ;\ z)$ et $\vec{v}(x'\ ;\ y'\ ;\ z')$,
  - le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'\ ;\ y + y'\ ;\ z + z')$;
  - le vecteur $\lambda\vec{u}$ a pour coordonnées $\vec{u}(\lambda x\ ;\ \lambda y\ ;\ \lambda z)$.
- Pour deux points $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B)$,
  - le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A\ ;\ y_B - y_A\ ;\ z_B - z_A)$;
  - le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\ ;\ \dfrac{y_A + y_B}{2}\ ;\ \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.

Propriété 12.13 (Vecteurs colinéaires)

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées $\vec{u}(x\ ;\ y\ ;\ z)$ et $\vec{v}(x'\ ;\ y'\ ;\ z')$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$ et $yz' - y'z = 0$.

Méthode pour vérifier si deux vecteurs à trois coordonnées sont colinéaires

Utiliser la définition de vecteurs colinéaires

On sait que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

Par exemple pour les vecteurs $\vec{u}(-1\ ;\ 3\ ;\ 5)$ et $\vec{v}(-2\ ;\ 6\ ;\ 10)$, on voit facilement que $\vec{v} = 2\vec{u}$, par conséquent ces deux vecteurs sont colinéaires.

Utiliser la propriété 12.13

$$\begin{array}{ll} \vec{u} & (x\ ;\ y\ ;\ z) \\ \vec{v} & (x'\ ;\ y'\ ;\ z') \end{array}$$

On calcule $xy' - x'y$ et $yz' - y'z$.

- Si les deux résultats sont nuls, les deux vecteurs sont colinéaires.

- Sinon, c'est à dire si un ou deux résultats sont non nuls, les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

Par exemple cette méthode est plus pratique dans le cas suivant où on ne détermine pas de manière évidente un nombre k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

$\vec{u}$ $(\ 4 \ ;\ -6\ ;\ 10)$

$\vec{v}$ $(-10\ ;\ 15\ ;\ -25)$

Calculs : $4 \times 15 - (-10) \times (-6) = 0$ $\quad (-6) \times (-25) - 15 \times 10 = 0$

Donc ces deux vecteurs sont colinéaires.

12.5 Représentation paramétrique d'une droite.

Dans un repère de l'espace, un point A a pour coordonnées $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et un vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\vec{u}(a\ ;\ b\ ;\ c)$.

Dire qu'un point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient à la droite passant par le point A de vecteur directeur $\vec{u}$ signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires autrement dit il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.

On a donc le système : $\left\{\begin{array}{l} x - x_A = ta \\ y - y_A = tb \\ z - z_A = tc \end{array}\right.$ et cela équivaut à : $\left\{\begin{array}{l} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{array}\right.$

D'où la définition ci-dessous.

Définition 12.9

Un point A et un vecteur $\vec{u}$ ont pour coordonnées $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et $\vec{u}(a\ ;\ b\ ;\ c)$ dans un repère de l'espace.
On appelle représentation paramétrique de la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ le système suivant : $\left\{\begin{array}{l} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{array}\right.$

Méthode : comment vérifier si un point appartient à une droite de représentation paramétrique donnée

On veut savoir si un point $B(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B)$ appartient ou non à la droite (d) de représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{l} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{array}\right.$

1re méthode

Le point B appartient à la droite (d) si et seulement si il existe un téel t tel que $\left\{\begin{array}{ll} x_B = x_A + at & (1) \\ y_B = y_A + bt & (2) \\ z_B = z_A + ct & (3) \end{array}\right.$

On résout alors l'équation (1) d'inconnue t, puis on vérifie si la solution obtenue est aussi solution des équations (2) et (3).

Si la solution de l'équation (1) est aussi solution des équations (2) et (3), alors le point B appartient bien à la droite (d), sinon le point B n'appartient pas à la droite (d).

2e méthode

La droite (d) passe par le point $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et le vecteur $\vec{u}(a\ ;\ b\ ;\ c)$ est un vecteur directeur de la droite (d), par conséquent le point B appartient si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}(a\ ;\ b\ ;\ c)$ sont colinéaires.

On vérifie donc si ces vecteurs sont colinéaires ou non.

Méthode : comment vérifier si un vecteur est un vecteur directeur d'une droite de représentation paramétrique donnée

On veut savoir si un vecteur $\vec{v}(a' \ ; \ b' \ ; \ c')$ est un vecteur directeur de la droite (d) de représentation paramétrique : $(d) \left\{ \begin{array}{l} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{array} \right.$

Le vecteur $\vec{v}(a' \ ; \ b' \ ; \ c')$ est un vecteur directeur de la droite (d) si et seulement si les vecteurs $\vec{v}(a' \ ; \ b' \ ; \ c')$ et $\vec{u}(a \ ; \ b \ ; \ c)$ sont colinéaires.

On vérifie donc si ces vecteurs sont colinéaires ou non.

12.6 Représentation paramétrique d'un plan.

Dans un repère de l'espace, un point A a pour coordonnées $A(x_A \ ; \ y_A \ ; \ z_A)$ et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées $\vec{u}(a \ ; \ b \ ; \ c)$ et $\vec{v}(a' \ ; \ b' \ ; \ c')$.

On appelle $\mathscr{P}$ le plan défini par le point A et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Dire qu'un point $M(x \ ; \ y \ ; \ z)$ appartient au plan $\mathscr{P}$ signifie qu'il existe des réels t et t' tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$.

On a donc le système : $\left\{ \begin{array}{l} x - x_A = ta + t'a' \\ y - y_A = tb + t'b' \\ z - z_A = tc + t'c' \end{array} \right.$ et cela équivaut à : $\left\{ \begin{array}{l} x = x_A + ta + t'a' \\ y = y_A + tb + t'b' \\ z = z_A + tc + t'c' \end{array} \right.$

D'où la définition ci-dessous.

Définition 12.10

Un point A et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées $A(x_A \ ; \ y_A \ ; \ z_A)$, $\vec{u}(a \ ; \ b \ ; \ c)$, $\vec{v}(a' \ ; \ b' \ ; \ c')$ dans un repère de l'espace.
On appelle représentation paramétrique du plan $\mathscr{P}$ défini par le point A et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le système suivant : $\left\{ \begin{array}{l} x = x_A + at + a't' \\ y = y_A + bt + b't' \\ z = z_A + ct + c't' \end{array} \right.$

Chapitre 13

Lois à densité

I Exercices

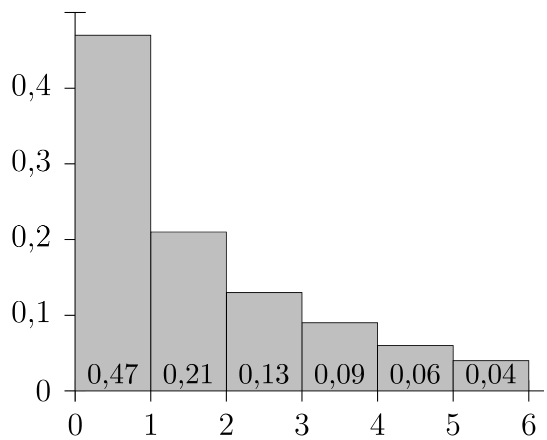
13.1 Loi à densité

Exercice 13.1

Dans une région, on a constaté que tout habitant résidait à moins de six kilomètres d'une déchetterie.

1. Un relevé statistique a permis d'établir l'histogramme des fréquences ci-contre.
   Par exemple, 47 % des habitants des habitants résident à moins d'un kilomètre d'une déchetterie.

   Calculer le pourcentage d'habitants résidants à une distance d'une déchetterie comprise entre 2 et 5 km.



2. On choisit un habitant au hasard. On appelle X la distance séparant la résidence de cet habitant de la déchetterie la plus proche. X est une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans l'intervalle $[0\,;\,6[$.

   a) Compléter :
   $P(0 \leqslant X \leqslant 1) =$ .... $P(2 \leqslant X \leqslant 5) =$ .... $P(0 \leqslant X \leqslant 6) =$ ....

   b) Pour deux entiers a et b compris entre 0 et 6 tels que $a \leqslant b$, indiquer ce qui représente sur le graphique la probabilité $P(a \leqslant X \leqslant b)$?

3. Une étude statistique plus détaillée donne les valeurs suivantes.

Distance d	$[0\,;\,0,5[$	$[0,5\,;\,1[$	$[1\,;\,1,5[$	$[1,5\,;\,2[$	$[2\,;\,2,5[$	$[2,5\,;\,3[$
Fréquence	0,29	0,18	0,12	0,09	0,07	0,06

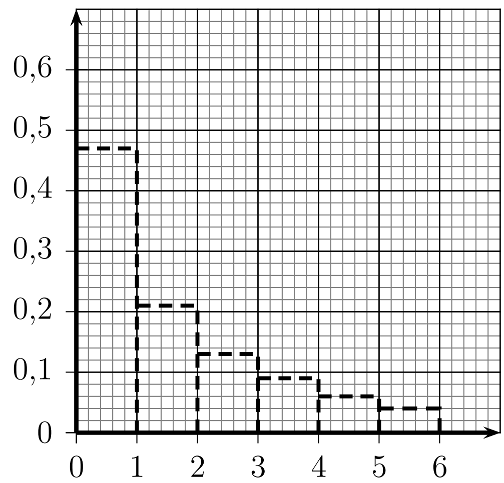
Distance d	$[3\,;\,3,5[$	$[3,5\,;\,4[$	$[4\,;\,4,5[$	$[4,5\,;\,5[$	$[5\,;\,5,5[$	$[5,5\,;\,6]$
Fréquence	0,05	0,04	0,03	0,03	0,02	0,02

Remarquons qu'en ajoutant les fréquences deux par deux, on retrouve bien sûr les fréquences précédentes, par exemple : $0,29 + 0,18 = 0,47$.

a) Tracer l'histogramme des fréquences au crayon. L'histogramme du **1.** est en pointillés pour comparer. Lire la remarque ci-dessous.

b) On considère à nouveau la variable aléatoire X du **2.** Compléter :
$p(3 \leqslant X < 4,5) =$ ....

c) Indiquer ce qui représente sur le graphique la probabilité précédente ?



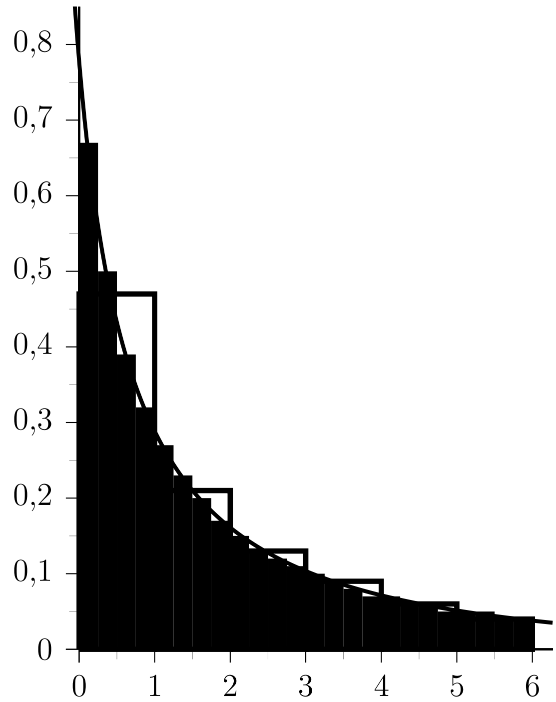
Remarque pour le tracé de l'histogramme

Le premier rectangle de l'histogramme précédent (en pointillés) qui représente la fréquence 0,47 est remplacé par deux rectangles. Comme ces deux rectangles doivent représenter à eux deux la même fréquence, il faut que la somme des aires de ces deux rectangles soit égale à l'aire de ce premier rectangle. Il en est de même pour les autres rectangles.

4. Une étude plus précise a permis de relever les distances à 0,25 km près et de construire l'histogramme ci-dessous, où chacun des 24 rectangles a pour base 0,25 et pour aire la fréquence de la classe correspondante.

Le premier rectangle a pour hauteur 0,67 car 16,75 % résident à moins de 0,25 kilomère de l'écopoint, en effet $0,25 \times 0,67 = 0,1675$

On considère à nouveau la variable aléatoire X du **2.**
La probabilité $P(3 \leqslant X < 4,5)$ n'a pas changé de valeur, mais indiquer ce qui la représente sur le graphique cette fois-ci ?



5. Si on fait une étude de plus en plus précise on voit apparaître la courbe tracée sur la figure précédente. Cette courbe représente une fonction f définie sur $[0\,;\,6[$, appelée **densité de probabilité** de la loi de X.

a) Soient a et b deux nombres réels appartenant à $[0\,;\,6[$ tels que $a \leqslant b$.
Indiquer ce qui représente $P(a \leqslant X \leqslant b)$ par rapport à la courbe de la fonction f.

b) Donner l'expression de $P(a \leqslant X \leqslant b)$ par rapport à la fonction f.

c) Pour un nombre réel a de l'intervalle $[0\,;\,6[$, que signifie la probabilité $P(a \leqslant X \leqslant a)$ et quelle est sa valeur ?

COURS : *lire la définition de loi à densité sur un intervalle au paragraphe 13.1.*

Exercice 13.2

On choisit une journée au hasard dans la production quotidienne d'un produit donné. La production quotidienne X de ce produit en tonnes est une variable aléatoire continue qui prend ses valeurs dans l'intervalle $[0\,;\,10]$ avec la densité de probabilité f définie par : $f(x) = 0,006(10x - x^2)$.

1. Que signifie concrètement « la variable aléatoire prend ses valeurs dans l'intervalle $[0\,;\,10]$ » ?
2. Vérifier que f est une densité de probabilité sur $[0\,;\,10]$.
3. Calculer la probabilité que la production soit comprise entre 2 et 3 tonnes.
4. Calculer $p(0 \leqslant X \leqslant 7)$
5. Calculer $p(X > 7)$.
6. Ce jour là, la production est supérieure à 5 tonnes. Calculer la probabilité que la production soit inférieure à 7 tonnes.

Exercice 13.3

Au 1^{er} janvier 2011, une entreprise a mis sur le marché français un téléphone portable. Le public visé est l'ensemble des personnes agées de 15 à 30 ans résidant en France. Le temps écoulé, exprimé en mois, entre la mise sur le marché et l'acquisition de ce produit par une telle personne est modélisé par une loi dont la densité f est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x+8}}{\left(1 + \mathrm{e}^{-x+8}\right)^2}$$

1. Démontrer qu'une primitive de la fonction f est la fonction F définie par :
   $\mathrm{F}(x) = \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^{-x+8}}$
2. On choisit au hasard une personne âgée de 15 à 30 ans résidant en France.
   X est la variable aléatoire égale au temps écoulé en mois entre la mise sur le marché et et l'acquisition du produit par cette personne.
   a) Quelle est la probabilité qu'elle soit déjà en possession de ce produit avant le 1^{er} juillet 2011 ?
   b) Quelle est la probabilité qu'elle n'ait pas encore acheté ce produit au bout de 11 mois ?
   c) Avec la calculatrice, déterminer le nombre de mois n à partir duquel on a :
   $p(\mathrm{X} \leqslant n) > 0{,}99$.
   d) Une personne qui a entre 15 et 30 ans n'a toujours pas acheté ce téléphone portable à la fin du 6^{e} mois. Calculer la probabilité qu'elle ne l'ait toujours pas acheté à la fin du 9^{e} mois.

Exercice 13.4

Retrouver la réponse à la question **2. c)** de l'exercice 13.3 en résolvant une inéquation.

13.2 Loi uniforme

On choisit un nombre au hasard entre deux nombres a et b, et on appelle X la variable aléatoire égale à ce nombre. Le but des exercices qui suivent est d'étudier la loi de probabilité de cette variable aléatoire, nommée ***loi uniforme****.*

Exercice 13.5

Les calculatrices, les langages de programmation, et différents logiciels ont une commande permettant d'afficher un nombre décimal aléatoire entre 0 et 1.

Le but de cet exercice est d'apprendre à obtenir un nombre aléatoire entre deux nombres a et b.

La commande NbrAléat de la calculatrice affiche un nombre au hasard entre 0 et 1.

1. Si on saisit 3 * NbrAléat, on obtient un nombre au hasard entre quelles valeurs ?

2. Même question si on saisit

a) 5 * NbrAléat **b)** 4 + NbrAléat **c)** 7 + NbrAléat **d)** 3 + 6 * NbrAléat

3. Comment obtenir un nombre aléatoire

a) entre 0 et 2 ? **b)** entre 5 et 6 ? **c)** entre 3 et 7 ? **d)** entre a et b ?

Nombres aléatoires entre 0 et 1 avec les calculatrices

TI 82 : $\boxed{\text{math}}$ $\boxed{\leftarrow}$ (PRB) $\boxed{\text{entrer}}$, on voit `NbrAléat`, appuyer sur $\boxed{\text{entrer}}$.

TI 89 ou TI 92

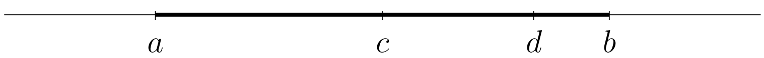
$\boxed{\text{HOME}}$ $\boxed{\text{2ND}}$ [MATH] $\boxed{7}$ (`7:Probability`) $\boxed{4}$ (`4:rand()`) $\boxed{\text{ENTER}}$

Compléter ainsi : `rand()`, appuyer sur $\boxed{\text{ENTER}}$.

CASIO : $\boxed{\text{OPTN}}$ $\boxed{\text{F6}}$ ($\triangleright$) $\boxed{\text{F3}}$ (PROB) $\boxed{\text{F4}}$ (RAND) $\boxed{\text{F1}}$ (Ran#) $\boxed{\text{EXE}}$

Exercice 13.6

Le but de cet exercice est d'étudier un exemple de la situation suivante :

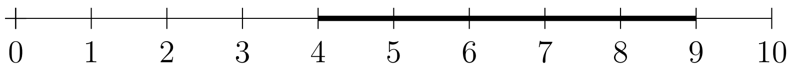


X est une variable aléatoire égale à un nombre choisi au hasard entre a et b.

c et d sont deux nombres de l'intervalle $[a\ ;\ b]$ *tels que* $c \leqslant d$.

Quelle est la probabilité de l'évènement $\{c \leqslant X \leqslant d\}$ *?*

On appelle X la variable aléatoire égale à un nombre aléatoire entre 4 et 9.



1. Conjecturer la probabilité suivante : $p(6 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 8) =$ ....

2. Le but de l'algorithme ci-dessous est
- d'effectuer n tirages aléatoires de nombres entre 4 et 9 ;
- de compter parmi les tirages combien sont entre 6 et 8 ;
- de calculer la fréquence f de tirages entre 6 et 8.

Algorithme
Lire n
$c \leftarrow 0$
Pour $k = 1$ jusqu'à $k = n$
    $a \leftarrow$ nombre aléatoire entre 4 et 9
    Si $a \geqslant 6$ et $a \leqslant 8$
        Alors $c \leftarrow c + 1$
    Fin du Si
Fin du Pour
$f \leftarrow \dfrac{c}{n}$
Afficher f

a) Programmer cet algorithme à la calculatrice ou en Python.

b) Compléter le tableau ci-dessous.
À la calculatrice, on ne complétera que pour $n = 100$ et $n = 1\,000$.

n	100	1 000	10 000	100 000
f				

c) Comparer les résultats des questions **1.** et **2. b)**.

Nombres aléatoires entre 0 et 1 en Python

Il faut importer le module random, donc il faut saisir ceci en début de programme :

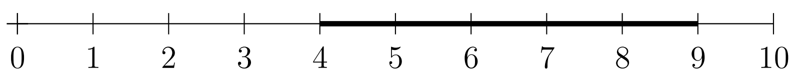
```
from random import *
```

Pour affecter à une variable `a` un nombre aléatoire entre 0 et 1, on saisit : `a=random()`

Exercice 13.7

X est une variable aléatoire égale à un nombre choisi au hasard entre a et b. Le but de cet exercice est d'étudier l'espérance de X.

On reprend le même exemple que dans l'exercice 13.6 : X est la variable aléatoire égale à un nombre choisi au hasard entre 4 et 9.



1. Conjecturer l'espérance de X : $E(X) =$ ....

2. Si on effectue un grand nombre de tirages d'un nombre aléatoire entre 4 et 9, on sait que la moyenne de ces tirages est proche de $E(X)$. Nous allons donc modifier l'algorithme de l'exercice 13.6 pour que
- il effectue n tirages aléatoires de nombres entre 4 et 9 ;
- il calcule la somme de ces nombres ;
- il calcule la moyenne m de ces nombres.

a) Écrire l'algorithme modifié ci-dessous.

....

....

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

b) Programmer cet algorithme à la calculatrice ou en Python.

c) Compléter le tableau ci-dessous.
À la calculatrice, on ne complétera que pour $n = 100$ et $n = 1\,000$.

n	100	1 000	10 000	100 000
m				

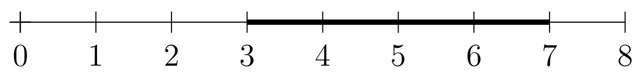
d) Comparer les résultats des questions **1.** et **2. b)**.

Exercice 13.8

Après avoir traité les exercices 13.6 et 13.7, nous avons étudié le calcul de $p(c \leqslant X \leqslant d)$ et de $E(X)$ pour une variable aléatoire X qui suit une loi uniforme sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

Le but de cet exercice est de récapituler les connaissances sur la loi uniforme :
- *calculer une probabilité ;*
- *préciser quelle est la densité de X ;*
- *revenir sur l'espérance et un autre moyen de la calculer.*

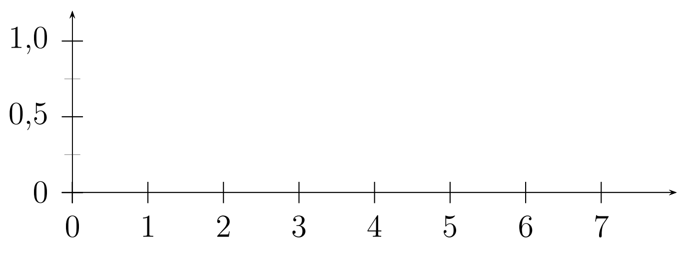
On choisit un nombre au hasard entre 3 et 7, et on appelle X la variable aléatoire égale à ce nombre. La variable aléatoire X suit donc la loi uniforme sur l'intervalle $[3\,;\,7]$.



1. Calculer une probabilité avec une loi uniforme.
Calculer les probabilités suivantes.

a) $p(3 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 5)$ **b)** $p(3 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 7)$ **c)** $p(5 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 6)$ **d)** $p(3,5 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 4)$

2. La densité de probabilité d'une loi uniforme
La variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[3\,;\,7]$.
Cette loi a une fonction f de densité.



a) Quelle est cette fonction f ?

b) Tracer ci-dessus la représentation graphique de cette fonction.

c) En hachurant ou en coloriant, faire apparaître sur la figure ci-dessus, les probabilités suivantes : $p(5 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 6)$ et $p(3,5 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 4)$.

3. L'espérance d'une loi uniforme

a) Quelle est l'espérance de X ?

b) L'espérance d'une variable aléatoire X de densité f sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ est donnée par : $E(X) = \displaystyle\int_a^b t f(t)\, dt$.

Vérifier qu'on retrouve le résultat du **3. a)** en calculant $\displaystyle\int_3^7 t f(t)\, dt$.

On pourra poser : $g(t) = t\, f(t)$.

COURS : *lire le paragraphe 13.3 sur la loi uniforme.*

Exercice 13.9

Un établissement doit recevoir la visite d'un inspecteur entre 7 h et 17 h. L'heure d'arrivée de cet inspecteur est aléatoire. X est la variable aléatoire égale à l'arrivée de l'inspecteur.

1. Déterminer la fonction f de densité de probabilité de X.

2. Calculer la probabilité que l'inspecteur arrive
(a) avant 8 h (b) après 12 h (c) entre 9 h 30 et 10 h

3. Calculer l'espérance de l'heure d'arrivée de l'inspecteur.

4. L'établissement apprend que l'inspecteur n'arrivera pas avant 11 h. Calculer la probabilité que l'inspecteur arrive après 12 h.

Exercice 13.10

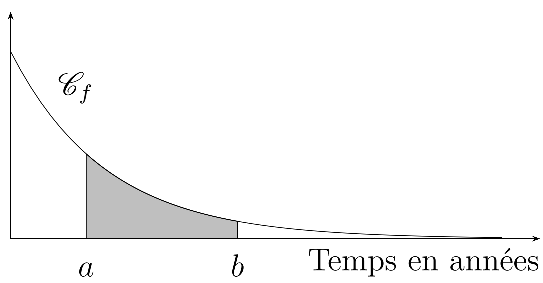
Une personne vient assurer 1 h de travail entre 16 h et 17 h chaque jour. Une deuxième personne vient travailler pendant 1 h, mais son heure d'arrivée est aléatoire entre 14 h et 19 h.

Calculer la probabilité que ces deux personnes se croisent.

13.3 Loi exponentielle

Exercice 13.11

On choisit au hasard un appareil ménager.
X est la durée de vie en années de cet appareil avant la première panne. On peut modéliser cette situation en considérant X comme une variable aléatoire qui suit une loi de probabilité p de densité f, définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par
$f(x) = 0,198\,\mathrm{e}^{-0,198\,x}$.



Ainsi : $p(a \leqslant X \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b 0,198\,\mathrm{e}^{-0,198\,x}\, dx$

1. a) Décrire par une phrase l'évènement $\{0 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 1\}$

b) Calculer sa probabilité, en détaillant les calculs.

2. Mêmes consignes (a) et (b) pour l'évènement $\{6 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 7\}$

3. En arrondissant au centième près, calculer les probabilités que l'appareil tombe en panne

a) avant la fin de la 10^{e} année ;

b) entre la fin de la 3e année et la fin de la 4e année.

4. Calculer la probabilité que l'appareil tombe en panne après la fin de la 8e année.
5. À partir de quel nombre d'années n la probabilité que l'appareil ait sa première panne avant la fin de l'année n soit supérieure ou égale à 0,99. Arrondir à l'unité près.

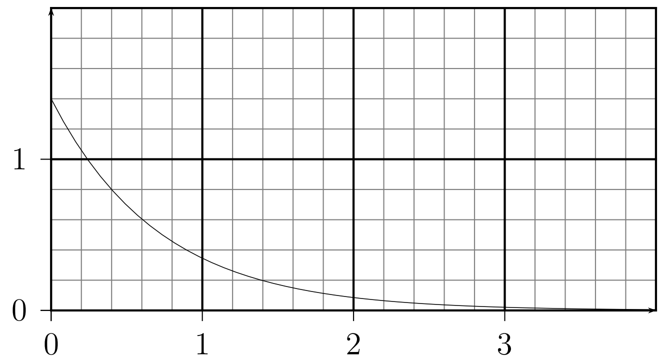
COURS : *lire le paragraphe 13.4 sur la loi exponentielle.*

Exercice 13.12

La variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ.

La fonction de densité de probabilité de cette loi est représentée ci-dessous.

1. Lire sur le graphique la valeur du paramètre λ.
2. Calculer $P(X > 1)$ en utilisant cette valeur de λ.
3. Mettre en évidence sur le graphique la probabilité précédente.



Exercice 13.13

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

On se propose de calculer l'espérance mathématique de X, notée $E(X)$.

1. Rappeler la fonction f de densité de probabilité de la loi exponentielle.
2. On appelle g et G les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $g(t) = \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}$ et $G(t) = -\left(t + \dfrac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

   Démontrer que la fonction G est une primitive de la fonction g.
3. L'espérance mathématique de X, est donnée par : $E(X) = \lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_0^x tf(t)\,dt$.

   a) Démontrer que pour tout réel x : $\displaystyle\int_0^x tf(t)\,dt = \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda x} + 1\right)$.

   b) Déterminer $E(X)$ en fonction de λ.

Exercice 13.14

Un élément radioactif a une durée de vie moyenne de 5 000 ans soit 50 siècles.

Sa durée de vie T en siècles est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Calculer le paramètre λ.
2. Calculer la probabilité que cet élément radioactif soit désintégré avant 30 siècles.

Exercice 13.15

X est la variable aléatoire qui donne la distance parcourue en kilomètres par un pneu sans crevaison.

On suppose que X suit la loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.

Sachant que la probabilité que le pneu parcoure entre 0 et 1 000 kilomètres sans crevaison est égale à 0,85, déterminer la valeur de λ à 10^{-3} près.

13.4 Exercice de bac

Exercice 13.16 (Bac S, Antilles, juin 2015, ex. 2)

La partie C peut être traitée indépendamment des parties A et B

Partie A

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

On rappelle que, pour tout réel a strictement positif, $P(X \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.

On se propose de calculer l'espérance mathématique de X, notée $E(X)$, et définie par :

$E(X) = \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

On admet que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = -\left(t + \dfrac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

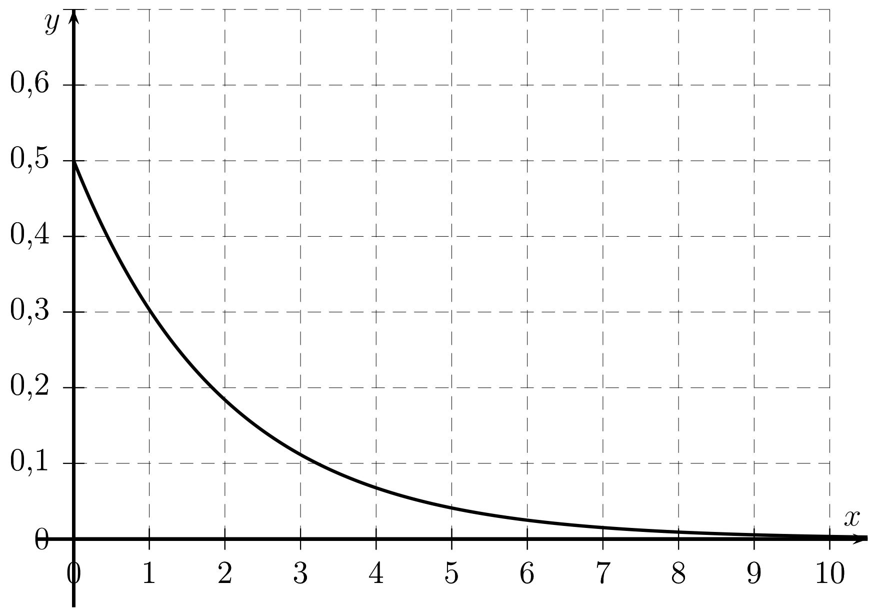
1. Soit x un nombre réel strictement positif. Vérifier que $\displaystyle\int_0^x \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda x} + 1\right)$.
2. En déduire que $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Partie B

La durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique peut être modélisée par une variable aléatoire notée X suivant la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

La courbe de la fonction densité associée est représentée plus bas.

1. Sur ce graphique
   - **a)** Représenter la probabilité $P(X \leqslant 1)$.
   - **b)** Indiquer où se lit directement la valeur de λ.
2. On suppose que $E(X) = 2$.
   - **a)** Que représente dans le cadre de l'exercice la valeur de l'espérance mathématique de la variable aléatoire X ?
   - **b)** Calculer la valeur de λ.
   - **c)** Calculer $P(X \leqslant 2)$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à $0,01$ près. Interpréter ce résultat.
   - **d)** Sachant que le composant a déjà fonctionné une année, quelle est la probabilité que sa durée de vie totale soit d'au moins trois années ? On donnera la valeur exacte.



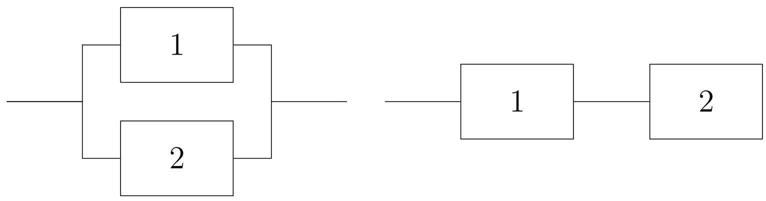
Partie C

Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note D_1 l'évènement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note D_2 l'évènement « le composant 2 est défaillant avant un an ».

On suppose que les deux évènements D_1 et D_2 sont indépendants et que

$P(D_1) = P(D_2) = 0,39$.

Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-dessous :



Circuit en parallèle A Circuit en série B

1. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.
2. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.

13.5 Pour réviser

Chapitre 14 – Notion de loi à densité

Les exercices résolus

- ex 1 p 379 : calculs de probabilités avec une variable aléatoire continue
- ex 7, 8 p 381 : calculs de probabilités avec une loi uniforme
- ex 11 p 383 :
- ex 12 p 383 : loi exponentielle et propriété de durée de vie sans vieillissement
- ex 12 p 383 : calculer le paramètre d'une loi exponentielle à partir d'une condition.

Rubrique *Pour s'exercer*, corrigés page 469

- ex 2 p 379 : calculs de probabilités avec une variable aléatoire continue
- ex 10 p 381 : calculs de probabilités avec une loi uniforme
- ex 13 p 383 : calculs de probabilités avec une loi exponentielle

Rubrique *Objectif bac*, corrigés page 479

- ex 55 p 388 (QCM) : loi exponentielle et loi uniforme
- ex 56 p 388 (Vrai-Faux) : loi exponentielle
- ex 58 p 389 : exercice de type bac, deux lois de probabilités
- ex 59 p 390 : problème de synthèse sur les probabilités

II Cours

13.1 Loi à densité sur un intervalle.

Variable aléatoire discrète et variable aléatoire continue

Les variables aléatoires discrètes sont les variables aléatoires étudiées jusqu'ici.

Une variable aléatoire discrète peut prendre plusieurs valeurs dans une liste de valeurs. Par exemple, on lance un dé, on considère la variable aléatoire égale au nombre obtenu, et la liste des valeurs est $\{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\}$.

Dans ce chapitre, on étudie un nouveau type de variable aléatoire, les variables aléatoires continues.

Une variable aléatoire continue peut prendre une infinité de valeurs dans un intervalle de valeurs.

Par exemple, on choisit au hasard un habitant dans une région où tout habitant habite à moins de 6 km d'une déchetterie, et on considère la variable aléatoire X égale à la distance séparant la résidence de cet habitant de la déchetterie la plus proche. Ainsi l'intervalle de valeurs est $[0\,;\,6[$.

Loi d'une variable aléatoire discrète et loi à densité d'une variable aléatoire continue

La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète est donnée par un tableau tel que celui-ci pour le lancer de dé.

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Pour une variable aléatoire continue, cela n'est plus possible, et on définit sa loi de probabilité comme cela est indiqué ci-dessous.

Définition 13.1

X est une variable aléatoire continue à valeurs dans un intervalle I.
f est une fonction continue et positive sur I telle que

$$\int_a^b f(t)\,dt = 1 \quad \text{si} \quad \mathrm{I} = [a\;;\;b] \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,dt = 1 \quad \text{si} \quad \mathrm{I} = [a\;;\;+\infty[$$

Dire que p est la loi de probabilité de densité f de X signifie que

pour tous nombres c et d de l'intervalle I tels que $c \leqslant d$: $\quad p(c \leqslant \mathrm{X} \leqslant d) = \displaystyle\int_c^d f(t)\,dt$

Propriété 13.1 (Conséquences)

Pour tous nombres réels c et d de I, on a les égalités ci-dessous.

- $p(\mathrm{X} = c) = 0$
- $p(c \leqslant \mathrm{X} \leqslant d) = p(c \leqslant \mathrm{X} < d) = p(c < \mathrm{X} \leqslant d) = p(c < \mathrm{X} < d)$
- $p(\mathrm{X} > c) = 1 - p(\mathrm{X} \leqslant c)$

13.2 Espérance d'une loi à densité

Définition 13.2 (Définition sur un intervalle borné)

L'espérance d'une variable aléatoire X de densité f sur un intervalle $[a\;;\;b]$ est donnée par :

$$E(X) = \int_a^b t f(t)\,dt$$

Pour définir l'espérance d'une loi à densité définie sur un intervalle $[a\ ;\ +\infty[$ il faut considérer que b tend vers $+\infty$ dans la définition précédente.

D'où la définition ci-dessous.

Définition 13.3 (Définition sur un intervalle $[a\ ;\ +\infty[$ **)**

L'espérance d'une variable aléatoire X de densité f sur un intervalle $[a\ ;\ +\infty]$ est donnée par : $E(X) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\int_a^x tf(t)\,dt \right)$.

13.3 Loi uniforme

Le programme indique qu'un élève de terminale S doit connaître la fonction de densité de la loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$.

Définition 13.4

Dire qu'une variable aléatoire X suit la **loi uniforme sur un intervalle [a ; b]** signifie que sa densité est une fonction constante sur [a ; b].

Propriété 13.2

La fonction de densité de probabilité d'une loi uniforme sur un intervalle [a ; b] est définie par : $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$.

Propriété 13.3

X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.
Pour tous nombres c et d de [a ; b] tels que $c \leqslant d$ on a : $p(c \leqslant \mathrm{X} \leqslant d) = \dfrac{d-c}{b-a}$

Propriété 13.4

X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur un intervalle [a ; b].
Son espérance est donnée par : $\mathrm{E(X)} = \dfrac{a+b}{2}$.

13.4 Loi exponentielle

13.4.a Définition et calculs de probabilité

Pour un réel $\lambda > 0$, une loi exponentielle a une densité de probabilité définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$. Justifions d'abord que cette fonction f est bien une densité de probabilité, conformément à la définition 13.1, autrement dit, justifions d'abord la propriété ci-dessous.

Propriété 13.5

Pour un réel λ strictement positif, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,dt \right) = 1$

Démonstration

Une primitive de la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$ est la fonction F définie par $F(t) = \lambda \times \dfrac{1}{-\lambda} \mathrm{e}^{-\lambda t} = -\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

Pour un réel $x > 0$, $\displaystyle\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt = F(x) - F(0) = -e^{-\lambda x} - (-e^0) = 1 - e^{-\lambda x}$.

Or : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(e^{-\lambda x}) = 0$, donc : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt\right) = 1$.

Définition 13.5

> λ est un réel strictement positif.
> Dire qu'une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ sur $[0\,;\,+\infty[$ signifie que sa densité de probabilité est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

Propriété 13.6

> X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.
> c et d sont deux réels tels que $0 \leqslant c \leqslant d$.
> On a alors : $P(c \leqslant X \leqslant d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$ $\quad P(0 \leqslant X \leqslant d) = 1 - e^{-\lambda d}$ $\quad P(X \geqslant c) = e^{-\lambda c}$

Démonstration

f est la fonction de densité de probabilité de la loi exponentielle, c'est à dire la fonction définie par $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

- Calcul de $p(c \leqslant X \leqslant d)$
  On a : $p(c \leqslant X \leqslant d) = \displaystyle\int_c^d \lambda e^{-\lambda t}\,dt$
  Déterminons une primitive F de la fonction f : $F(t) = \lambda \times \dfrac{1}{-\lambda} \times e^{-\lambda t} = -e^{-\lambda t}$
  On a donc :
  $p(c \leqslant X \leqslant d) = F(d) - F(c) = -e^{-\lambda d} - (-e^{-\lambda c}) = -e^{-\lambda d} + e^{-\lambda c} = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$
- Calcul de $p(X \leqslant d)$
  $p(X \leqslant d) = p(0 \leqslant X \leqslant d) = e^{-\lambda\times 0} - e^{-\lambda d} = 1 - e^{-\lambda d}$
- Calcul de $p(X \geqslant c)$
  $p(X \geqslant c) = 1 - p(X < c) = 1 - (1 - e^{-\lambda c}) = 1 - 1 + e^{-\lambda c} = e^{-\lambda c}$

13.4.b Espérance de la loi exponentielle

Propriété 13.7

> L'espérance d'une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ est : $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Démonstration

Cette démonstration est en fait l'objet de l'exercice n° 13.13, par conséquent la démonstration ci-dessous est ausi le corrigé de cet exercice.

Le programme de terminale S n'exige pas de connaître cette démonstration, en revanche, un exercice analogue peut être donné.

1. La fonction f de densité de probabilité de la loi exponentielle est la fonction définie par : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$
2. On appelle g et G les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $g(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$ et $G(t) = -\left(t + \dfrac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}$.

   Démontrons que la fonction G est une primitive de la fonction g.

$$\begin{aligned}G'(t) &= -\left[1\times \mathrm{e}^{-\lambda t} + \left(t+\frac{1}{\lambda}\right)\times(-\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]\\ &= -\mathrm{e}^{-\lambda t} - \left(t+\frac{1}{\lambda}\right)\times(-\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda t}\\ &= -\mathrm{e}^{-\lambda t} + \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t} + \mathrm{e}^{-\lambda t}\\ &= \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}\\ &= g(t)\end{aligned}$$

3. L'espérance mathématique de X, est donnée par : $E(X) = \lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_0^x tf(t)\,dt$.

a) Démontrons que pour tout réel x : $\displaystyle\int_0^x tf(t)\,dt = \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda x} + 1\right)$.

Pour tout réel t, on a : $tf(t) = t\times\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t} = \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t} = g(t)$ donc $\displaystyle\int_0^x tf(t)\,dt = \int_0^x g(t)\,dt$

$$\begin{aligned}\int_0^x tf(t)\,dt = \int_0^x g(t)\,dt = G(x)-G(0) &= -\left(x+\frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda x} - \left(-\frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^0\\ &= -x\mathrm{e}^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}\\ &= \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda x} + 1\right)\end{aligned}$$

b) Déterminons $E(X)$ en fonction de λ.

Déterminons donc la limite de $\dfrac{1}{\lambda}\left(-\lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda x} + 1\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Puisque $\lambda > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\lambda x) = -\infty$, et comme $\lim\limits_{X\to-\infty}(\mathrm{e}^X) = 0$, donc par composition, $\lim\limits_{X\to+\infty}(\mathrm{e}^{-\lambda x}) = 0$.

D'autre part, puisque $\lambda > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(\lambda x) = +\infty$, et on sait aussi que $\lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x} = \dfrac{\lambda x}{\mathrm{e}^{\lambda x}}$ et que $\lim\limits_{X\to+\infty}\left(\dfrac{X}{\mathrm{e}^X}\right) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\lambda x}{\mathrm{e}^{\lambda x}}\right) = 0$ par conséquent $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}) = 0$.

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda x} + 1) = 1$

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\lambda}(-\lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda x} + 1)\right) = \dfrac{1}{\lambda}$.

13.4.c Propriété de durée de vie sans vieillissement

Propriété 13.8

X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ,
alors, pour tous nombres positifs a et h, $p_{(X\geqslant a)}(X\geqslant a+h) = p(X\geqslant h)$.

Démonstration

D'après le cours sur les probabilités conditionnelles, on sait que :

$$p_{(X\geqslant a)}(X\geqslant a+h) = \frac{p(\{X\geqslant a\}\cap\{X\geqslant a+h\})}{p(X\geqslant a)}$$

Or, l'ensemble $\{X\geqslant a\}\cap\{X\geqslant a+h\}$ est l'intersection des intervalles $[a\ ;\ +\infty[$ et $[a+h\ ;\ +\infty[$, c'est à dire l'ensemble de nombres supérieurs ou égaux à a et $a+h$.

Or h est positif donc $a+h\geqslant a$, donc l'ensemble $\{X\geqslant a\}\cap\{X\geqslant a+h\}$ est l'ensemble $\{X\geqslant a+h\}$.

On a donc :

$$p_{(X\geqslant a)}(X \geqslant a+h) = \frac{p(X \geqslant a+h)}{p(X \geqslant a)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(a+h)}}{\mathrm{e}^{-\lambda(a)}} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda a-\lambda h}}{\mathrm{e}^{-\lambda a}} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda a} \times \mathrm{e}^{-\lambda h}}{\mathrm{e}^{-\lambda a}} = \mathrm{e}^{-\lambda h} = p(X \geqslant h)$$

Explication de l'expression *durée de vie sans vieillissement*

Prenons l'exemple d'une ampoule LED dont la durée de vie suit une loi exponentielle et qui été utilisée 500 heures sans panne.

Intéressons nous à la probabilité qu'elle dure 800 h, soit 300 heures de plus.
Cette probabilité s'écrit : $p_{(X\geqslant 500)}(X \geqslant 500+300)$
et d'après la propriété précédente : $p_{(X\geqslant 500)}(X \geqslant 500+300) = p(X \geqslant 300)$

Cela signifie que si l'ampoule a duré 500 heures, la probabilité qu'elle dure 300 heures de plus est égale à la probabilité qu'elle dure 300 h quand elle est neuve. Son vieillissement de 500 h n'a donc pas d'influence sur sa probabililité de durée de vie supplémentaire.

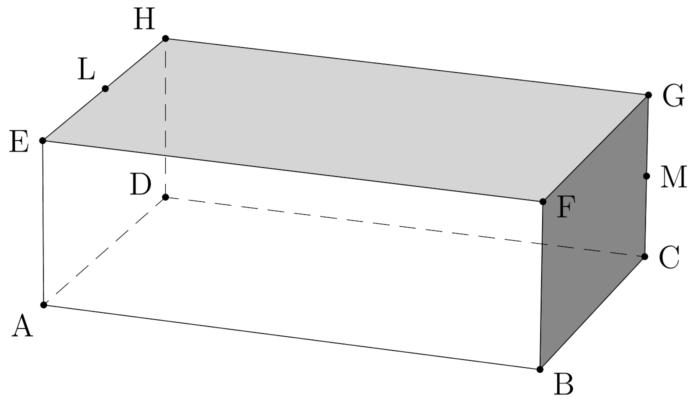
Chapitre 14

Produit scalaire dans l'espace

I Exercices

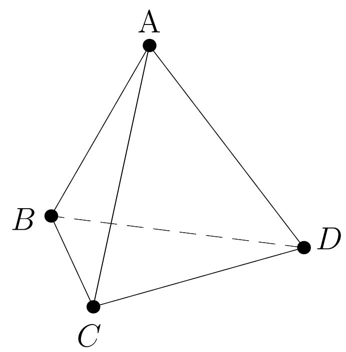
14.1 Définitions et propriétés

Exercice 14.1
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle tel que $AB = 6$, $AD = 4$, $AE = 2$. Les points L et M sont les milieux respectifs des arêtes $[EH]$ et $[CG]$.
Déterminer une mesure en degrés de l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{AL}\ ;\ \overrightarrow{AM})$.



Exercice 14.2
$ABCD$ est un tétraèdre régulier d'arête 5 cm.

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$.
2. Le point E est le milieu de $[CD]$.
Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{EC}$.



Exercice 14.3
On considère le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ de l'exercice 14.1
Les droites (BF) et (EG) sont-elles orthogonales ? Justifier.

14.2 Vecteur normal à un plan

Exercice 14.4

Le but des questions qui suivent est de démontrer que si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, alors cette droite est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Cette propriété avait déjà été étudiée dans un chapitre précédent mais n'avait pas été démontrée.

Considérons une droite (Δ) orthogonale à deux droites sécantes (d_1) et (d_2) d'un plan (P).

Soit $\vec{n}$, $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ des vecteurs directeurs respectifs de (Δ), (d_1), (d_2).

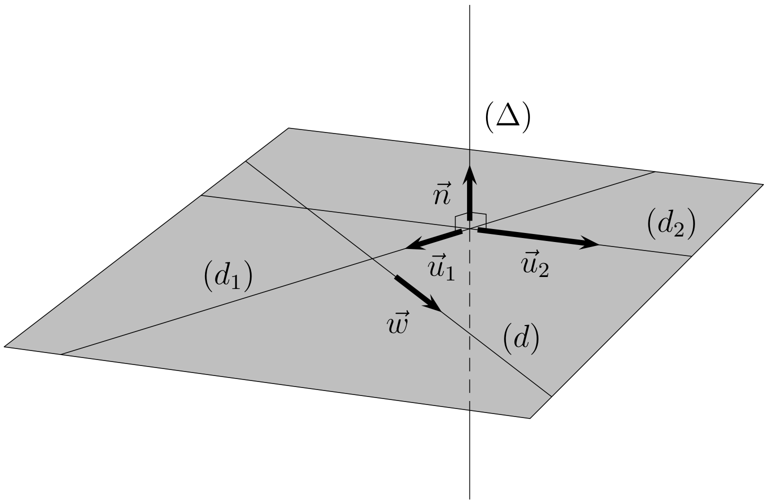
1. Justifier que les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas colinéaires.

2. Soit (d) une droite quelconque du plan (P) et $\vec{w}$ un de ses vecteurs directeurs.

a) Quel est le lien entre les vecteurs $\vec{w}$, $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$? Écrire une égalité.

b) Démontrer que les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux.

c) Conclure.



Exercice 14.5

Dans un repère orthonormé, les coordonnées de trois points A, B, C, et d'un vecteur $\vec{u}$ sont : $A(-4\ ;\ -1\ ;\ 1)$ $B(-1\ ;\ 2\ ;\ 2)$ $C(-2\ ;\ 0\ ;\ 1)$ $\vec{u}(1\ ;\ -2\ ;\ 3)$.

1. Vérifier si les points A, B, C définissent bien un plan.

2. Démontrer que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

14.3 Équation cartésienne d'un plan

Exercice 14.6

Dans un repère orthonormé, les coordonnées d'un point A, et d'un vecteur $\vec{n}$ sont :

$A(3\ ;\ 1\ ;\ 0)$ $\vec{n}(1\ ;\ 3\ ;\ -2)$.

(P) est le plan passant par A de vecteur normal $\vec{n}$.

Soit M un point du plan (P) de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$.

Démontrer que x, y, z vérifient une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

Exercice 14.7

Dans un repère orthonormé, les coordonnées d'un points A, et d'un vecteur $\vec{n}$ sont :

$A(-5\ ;\ 1\ ;\ -3) \quad \vec{n}(2\ ;\ 4\ ;\ -1)$.

Calculer une équation cartésienne du plan (P) passant par A de vecteur normal $\vec{n}$.

Exercice 14.8

Une équation cartésienne d'un plan (P) dans un repère orthonormé de l'espace est donnée par : $5x - y + 2z - 10 = 0$.

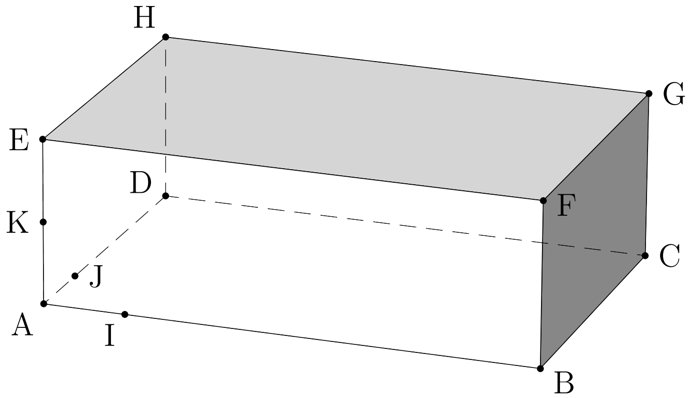
Déterminer les coordonnées d'un point A du plan (P) et d'un vecteur normal $\vec{n}$ au plan (P).

Exercice 14.9

On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ de l'exercice 14.1, tel que $AB = 6$, $AD = 4$, $AE = 2$.

Les points I, J, K appartiennent respectivement aux arêtes $[AB]$, $[AD]$, $[AE]$ et sont tels que $AI = AJ = AK = 1$.

Donner sans justifier une équation cartésienne de chacun des plans des faces du pavé droit $ABCDEFGH$ dans le repère $(A\ ;\ \overrightarrow{AI},\ \overrightarrow{AJ},\ \overrightarrow{AK})$.



Exercice 14.10

Une équation cartésienne d'un plan (P) est $5x - 3y + z + 7 = 0$.

1. Le point $A(0\ ;\ 2\ ;\ -1)$ appartient-il au plan (P). Justifier par des calculs.
2. Même question pour $A(4\ ;\ 6\ ;\ -10)$
3. Calculer les coordonnées d'un point C, qui soit différent des points A et B et qui appartienne au plan (P).

14.4 Positions relatives de droites et de plans

Exercice 14.11 (Deux plans)

Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne des équations cartésiennes des plans (P_1), (P_2), (P_3), (P_4).

$(P_1) : x + 3y - 4z + 7 = 0 \qquad (P_2) : -2x - 6y + 8z - 5 = 0$

$(P_3) : 2x + y + 3z + 9 = 0 \qquad (P_4) : x + y - z + 4 = 0$

Indiquer en justifiant les positions relatives des plans ci-dessous.

Si deux plans sont sécants, préciser s'ils sont perpendiculaires ou non.

1. (P_1) et (P_2) **2.** (P_1) et (P_3) **3.** (P_3) et (P_4)

Indication : on pourra lire d'abord dans le cours la propriété 14.9 et la définition 14.9.

Exercice 14.12 (Une droite et un plan)

Dans un repère orthonormé de l'espace, une équation cartésienne du plan (P) est $2x-y+3z+13=0$,

et une représentation paramétrique de la droite (d) est $\begin{cases} x=1+t \\ y=3-5t \\ z=t \end{cases}$

1. Justifier que le plan P et la droite (d) sont sécants.
2. On appelle A le point d'intersection du plan P et de la droite (d). Calculer les coordonnées du point A.

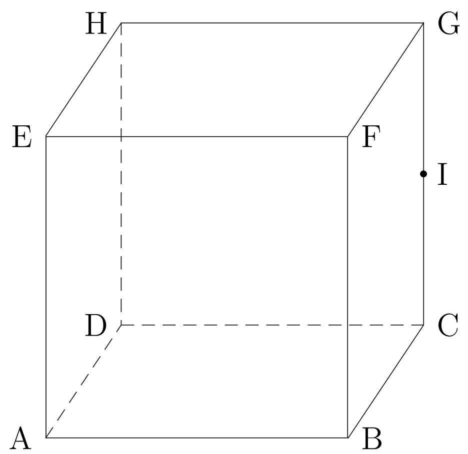
Indication : on pourra lire d'abord dans le cours la méthode 14.4 et l'exercice résolu juste après.

14.5 Perpendiculaire commune à deux droites non coplanaires

Exercice 14.13

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1, et on considère le repère orthonormé $(A\,;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Le point I est le milieu de l'arête $[CG]$. Le point M est un point de la droite (AB), et le point M' est un point de la droite (EI).



Le but de ce problème est de répondre aux deux questions ci-dessous.

- Où faut-il placer le point M sur la droite (AB), et le point M' sur la droite (EI), pour que la distance MM' soit minimale ?
- Quelle est alors la position de la droite (MM') par rapport à la droite (AB) et par rapport à la droite (EI) ?

Partie A – Conjectures avec un logiciel

Déplacer le point M sur la droite (AB) et le point M' sur la droite (EI) pour que la distance MM' soit minimale.

Indiquer alors :

1. les coordonnées des points M et M' ;
2. la distance MM' ;
3. les mesures en degrés des angles $\widehat{M'MA}$ et $\widehat{EM'M}$;
4. la position de la droite (MM') par rapport à la droite (AB) et par rapport à la droite (EI).

Partie B – Perpendiculaire commune aux droites (AB) **et** (EI)

1. Vérifions d'abord si les droites (AB) et (EI) sont bien non coplanaires. Répondre aux questions ci-dessous sans justifier.
   a) Le plan (AEI) contient deux autres points de la figure, lesquels ?
   b) le point B est-il dans le plan (AEI) ?
   c) les droites (AB) et (EI) sont-elles coplanaires ?
2. Donner sans justifier les coordonnées des points A, B, E, I, et des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EI}$.
3. Justifier qu'un point M de la droite (AB) a des coordonnées de la forme $(t\ ;\ 0\ ;\ 0)$ et qu'un point M' de la droite (EI) a des coordonnées de la forme $(t'\ ;\ t'\ ;\ 1 - 0,5\,t')$.
4. Écrire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ en fonction de t et de t'.
5. On admet que deux droites non coplanaires ont une perpendiculaire commune.
   a) Déterminer les valeurs de t et t' lorsque la droite (MM') est perpendiculaire aux droites (AB) et (EI).
   b) Avec ces valeurs de t et t', calculer les coordonnées des points M et M' et la distance MM', et comparer avec les conjectures de la partie A.

Partie C – Plus courte distance entre les droites (AB) **et** (EI)**.**

On appelle Q le point de la droite (AB) et R le point de la droite (EI) tels que la droite (QR) est perpendiculaire aux droites (AB) et (EI).

Les coordonnées des points Q et R ont été calculées dans la partie **B**.

On considère un point quelconque M de la droite (AB) et un point quelconque M' de droite (EI).

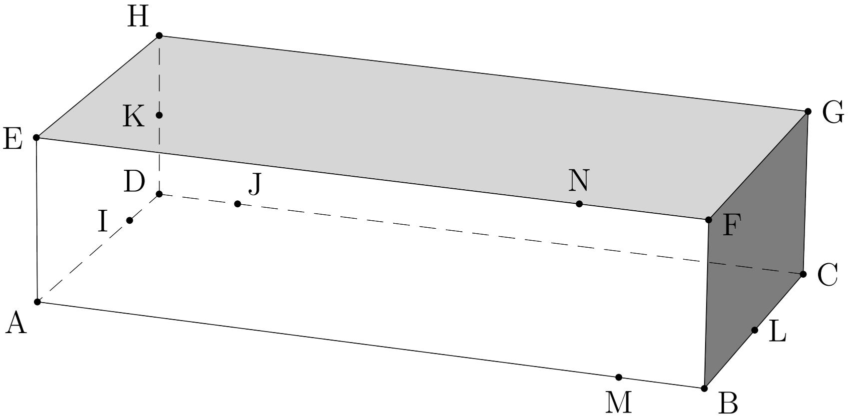
Le but des questions qui suivent est de démontrer que $MM' \geqslant QR$.

1. Sachant que $MM'^2 = \overrightarrow{MM'}^2 = \overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{MM'}$ et que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RM'}$, démontrer que $MM'^2 = (\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{RM'})^2 + QR^2$.
2. En déduire que $MM' \geqslant QR$.

14.6 Exercices de type bac

Exercice 14.14

On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ ci-dessous, pour lequel $AB = 8$, $AD = 4$ et $AE = 2$.



I, J et K sont les points tels que : $\overrightarrow{DI} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{DA}$, $\quad \overrightarrow{DJ} = \dfrac{1}{8}\overrightarrow{DC}$, $\quad \overrightarrow{DK} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DH}$.

On se place dans le repère orthonormé $(D\,;\ \overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DJ}, \overrightarrow{DK})$.

L est le milieu de l'arête $[BC]$, M et N sont les points placés respectivement sur les arêtes $[AB]$ et $[EF]$, tels que $AM = 7$ et $EN = 6,5$.

1. Donner sans justifier les coordonnées des points L, M, N.
2. Justifier que les points M, L, N ne sont pas alignés.
3. Déterminer une mesure en degrés de l'angle $\widehat{LMN}$. Arrondir à l'unité.
4. Calculer le volume du tétraèdre $BLMF$.
5. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (LMN).
6. Déterminer une équation cartésienne du plan (LMN).
7. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FG).
8. Déterminer les coordonnées du point d'intersection R du plan (LMN) et de la droite (FG).
9. **a)** Quelle est la section du pavé droit $ABCDEFGH$ par le plan (LMN) ?
   b) Tracer cette section sur la figure.
   c) Quelle est la nature de cette section ? Justifier.

Exercice 14.15 (Bac S, Métropole-Réunion, juin 2015, ex 2)

Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points A$(0\,;\ -1\,;\ 5)$, B$(2\,;\ -1\,;\ 5)$, C$(11\,;\ 0\,;\ 1)$, D$(11\,;\ 4\,;\ 4)$.

Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de 1 cm par seconde.

Un point N se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la vitesse de 1 cm par seconde.

À l'instant $t = 0$ le point M est en A et le point N est en C.

On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de t secondes, t désignant un nombre réel positif.

On admet que M_t et N_t, ont pour coordonnées : $M_t(t\,;\ -1\,;\ 5)$ et $N_t(11\,;\ 0,8t\,;\ 1 + 0,6t)$.

Les questions 1 *et* 2 *sont indépendantes.*

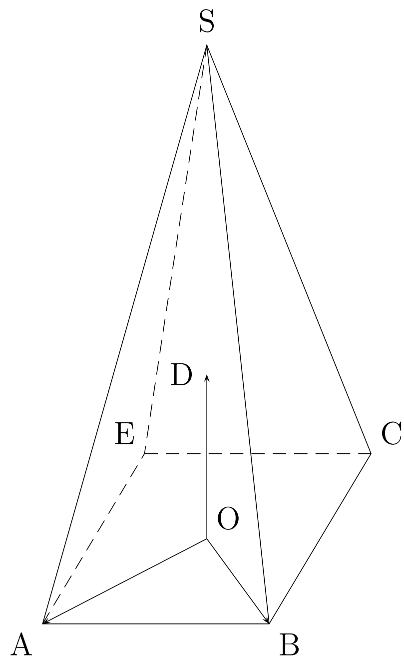
1. **a)** La droite (AB) est parallèle à l'un des axes (OI), (OJ) ou (OK). Lequel ?
   b) La droite (CD) se trouve dans un plan $\mathcal{P}$ parallèle à l'un des plans (OIJ), (OIK) ou (OJK). Lequel ? On donnera une équation de ce plan $\mathcal{P}$.
   c) Vérifier que la droite (AB), orthogonale au plan $\mathcal{P}$, coupe ce plan au point E$(11\ ;\ -1\ ;\ 5)$.
   d) Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?
2. **a)** Montrer que $M_tN_t^2 = 2t^2 - 25,2t + 138$.
   b) À quel instant t la longueur M_tN_t est-elle minimale ?

Exercice 14.16 (Bac S, Amérique du Nord, juin 2015, ex 1)

Dans l'espace, on considère une pyramide SABCE à base carrée ABCE de centre O.

Soit D le point de l'espace tel que $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OD}}\right)$ soit un repère orthonormé.

Le point S a pour coordonnées $(0\,;0\,;3)$ dans ce repère.



Partie A

1. Soit U le point de la droite (SB) de cote 1. Construire le point U sur la figure ci-dessus.
2. Soit V le point d'intersection du plan (AEU) et de la droite (SC). Montrer que les droites (UV) et (BC) sont parallèles. Construire le point V sur la figure ci-dessus.
3. Soit K le point de coordonnées $\left(\dfrac{5}{6}\ ;\ -\dfrac{1}{6}\ ;\ 0\right)$.

   Montrer que K est le pied de la hauteur issue de U dans le trapèze AUVE.

Partie B

Dans cette partie, on admet que l'aire du quadrilatère AUVE est $\dfrac{5\sqrt{43}}{18}$.

1. On admet que le point U a pour coordonnées $\left(0\ ;\ \dfrac{2}{3}\ ;\ 1\right)$.

   Vérifier que le plan (EAU) a pour équation $3x - 3y + 5z - 3 = 0$.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (EAU) passant par le point S.
3. Déterminer les coordonnées de H, point d'intersection de la droite (d) et du plan (EAU).
4. Le plan (EAU) partage la pyramide (SABCE) en deux solides. Ces deux solides ont-ils le même volume ?

14.7 Pour réviser

Chapitre du livre n^{o} 12 – Produit scalaire dans l'espace

Les exercices résolus

- ex 1 p 323 : calculer des produits scalaires
- ex 2 p 323 : calculer une mesure d'angle
- ex 7 p 325 : utiliser les règles de calcul du produit scalaire
- ex 11 p 327 : orthogonalité de deux droites, d'une droite et d'un plan
- ex 20 p 329 : vecteur normal à un plan
- ex 21 p 329 : équation cartésienne d'un plan
- ex 22 p 329 : deux plans perpendiculaires

Rubrique *Pour s'exercer*, corrigés page 468

- ex 3 p 323 : calculer des produits scalaires
- ex 6 p 323 : calculer une mesure d'angle
- ex 8 p 325 : calculer une distance et un produit scalaire en décomposant des vecteurs en somme de vecteurs
- ex 12 p 327 : orthogonalité de droites
- ex 24 p 329 : équation cartésiennes de deux plans, sont-ils perpendiculaires , parallèles ?

Rubrique *Objectif bac*, corrigés page 478

- ex 80 p 335 : QCM
- ex 81, 82 p 335 : Vrai-Faux
- ex 83 p 336 : plan tangent à une sphère, exercice de type bac

II Cours

14.1 Définitions et propriétés

On étend à l'espace la définition de norme d'un vecteur et de produit scalaire donnée dans le plan.

14.1.a Norme d'un vecteur

Définition 14.1

La norme d'un vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$ est la longueur du vecteur $\vec{u}$.

Propriété 14.1

- Dans un repère orthonormé, la norme d'un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ est donnée par : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- Pour un vecteur $\vec{u}$ et un nombre réel λ, $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \times \|\vec{u}\|$

14.1.b Définitions

Les définitions ci-dessous sont équivalentes.

Définition 14.2 (1)

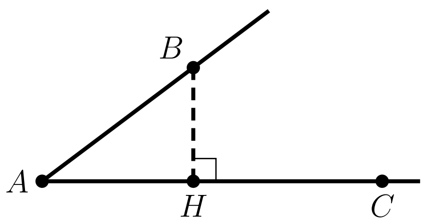
- Pour trois points A, B, C de l'espace $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$
- Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u}.\vec{v} = \dfrac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$

Définition 14.3 (2)

Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ et $(x'\ ;\ y'\ ;\ z')$ dans un repère orthonormé, alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

Définition 14.4 (3)

A, B, C sont trois points de l'espace et H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC). alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH}$



Définition 14.5 (4)

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ distincts du vecteur nul, $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$

14.1.c Propriétés

Propriété 14.2

- Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,
  - Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens, alors $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
  - Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens opposés, alors $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
- Pour trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et un nombre réel λ,
  $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$ $(\lambda\vec{u}).\vec{v} = \lambda(\vec{u}.\vec{v})$

14.1.d Produit scalaire et orthogonalité

Propriété 14.3

Pour trois points A, B, C, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ si et seulement si $(AB) \perp (AC)$ ou $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

Définition 14.6

Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** signifie que $\vec{u}.\vec{v} = 0$

14.2 Vecteur normal à un plan

Définition 14.7

Un vecteur normal à un plan est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à ce plan.

Propriété 14.4

Une droite est orthogonale à toutes les droites d'un plan si et seulement si cette droite est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Remarque : cette propriété avait déjà été étudiée dans un chapitre précédent mais n'avait pas été démontrée.

Démonstration

Si une droite est orthogonale à toutes les droites d'un plan, il est bien évident qu'alors cette droite est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Réciproquement considérons une droite (Δ) orthogonale à deux droites sécantes (d_1) et (d_2) d'un plan (P).

Soit $\vec{n}$, $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ des vecteurs directeurs respectifs de (Δ), (d_1), (d_2).

Les droites (d_1) et (d_2) étant sécantes, les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas colinéaires.

Soit (d) une droite quelconque du plan (P) et $\vec{w}$ un de ses vecteurs directeurs. Démontrons que cette droite est orthogonale à la droite (Δ).

Les vecteurs $\vec{w}$, $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ sont coplanaires et les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas colinéaires donc il existe des réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u_1} + y\vec{u_2}$.

Calculons maintenant le produit scalaire des vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{n}$.

$\vec{n}.\vec{w} = \vec{n}.(x\,\vec{u_1} + y\,\vec{u_2}) = x\,\vec{n}.\vec{u_1} + y\,\vec{n}.\vec{u_2}$

Or la droite (Δ) est orthogonale aux droites (d_1) et (d_2) donc $\vec{n}.\vec{u_1} = 0$ et $\vec{n}.\vec{u_2} = 0$

donc $\vec{n}.\vec{w} = 0$ donc la droite (d) est orthogonale à la droite (Δ).

Propriété 14.5

Un vecteur non nul est normal à un plan si et seulement si ce vecteur est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires qui dirigent ce plan.

Démonstration : cette propriété est une conséquence de la propriété précédente.

Propriété 14.6

Un vecteur normal à un plan est orthogonal à tout vecteur directeur d'une droite de ce plan.

Démonstration

Un vecteur normal $\vec{n}$ à un plan (P) est un vecteur directeur d'une droite Δ orthogonale à ce plan.

Or une droite orthogonale à un plan est une droite orthogonale à deux droites sécantes de ce plan, et d'après la propriété précédente une droite orthogonale à un plan est orthogonale à toute droite de ce plan.

Donc le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur directeur d'une droite du plan (P).

14.3 Équation cartésienne d'un plan

Propriété 14.7

Soient a, b, c trois nombres réels tels que au moins l'un des trois n'est pas nul, soit d un réel quelconque, et soit un repère orthonormé de l'espace.

- L'ensemble des points M de l'espace de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ dans ce repère qui vérifient l'égalité $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de l'espace.
- Le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ est un vecteur normal à ce plan.

Définition 14.8

Soient a, b, c trois nombres tels que au moins l'un des trois n'est pas nul et un repère orthonormé de l'espace.
L'égalité $ax + by + cz + d = 0$ vérifiée par tous les points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ d'un plan de l'espace est appelée **équation cartésienne** de ce plan.

Propriété 14.8

Pour un plan (P), un point $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$, un vecteur $\vec{n}(a\ ;\ b\ ;\ c)$,
une équation cartésienne du plan (P) passant par A de vecteur normal $\vec{n}$ est :
$\boxed{a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0}$

Méthode 14.1 (Calculer une équation cartésienne d'un plan)

Prenons un exemple. Dans un repère orthonormé, les coordonnées d'un points A, et d'un vecteur $\vec{n}$ sont : $A(-2\ ;\ 3\ ;\ 1)$ $\quad \vec{n}(1\ ;\ 5\ ;\ -7)$.

Calculer une équation cartésienne du plan (P) passant par A de vecteur normal $\vec{n}$.

1re méthode

Puisque le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (P), d'après la propriété 14.7, on sait qu'une équation cartésienne de (P) est : $x + 5y - 7z + d = 0$.

On sait que le point A appartient au plan (P), donc ses coordonnées vérifient l'équation ci-dessus, par conséquent remplaçons x, y, z, par les coordonnées du point A.

$-2 + 5 \times 3 - 7 \times 1 + d = 0 \iff 6 + d = 0 \iff d = -6$

Une équation du plan (P) est donc : $\boxed{x + 5y - 7z - 6 = 0}$.

2^e méthode

On utilise la propriété 14.8.

Une équation cartésienne de (P) s'écrit alors : $1 \times (x - (-2)) + 5 \times (y - 3) - 7 \times (z - 1) = 0$.

$$\begin{aligned} 1 \times (x - (-2)) + 5 \times (y - 3) - 7 \times (z - 1) = 0 &\iff x + 2 + 5y - 15 - 7z + 7 = 0 \\ &\iff x + 5y - 7z + 2 - 15 + 7 = 0 \\ &\iff x + 5y - 7z + 2 - 15 + 7 = 0 \\ &\iff x + 5y - 7z - 6 = 0 \end{aligned}$$

Méthode 14.2 (Un point appartient-il à un plan ?)

Exemple : le point $A(3\ ;\ -1\ ;\ 4)$ appartient-il au plan (P) d'équation cartésienne $2x-y+5z-6 = 0$?

On remplace les coordonnées du point dans $2x - y + 5z - 6$, on effectue le calcul, et on vérifie si le résultat est bien égal à zéro ou non.

$2 \times 3 - (-1) + 5 \times 4 - 6 = 21 \neq 0$. Donc $\boxed{\text{le point } A \text{ n'appartient pas au plan } (P)}$.

Méthode 14.3 (Calculer les coordonnées d'un point d'un plan)

Exemple : calculons les coordonnées d'un point du plan (P) d'équation cartésienne $2x-y+5z-6 = 0$?

Méthode : choisir les valeurs de deux coordonnées de ce point et calculer la 3e coordonnée.

Par exemple, ici, on a intérêt à choisir $x = 0$ et $z = 0$, et on remplace ces valeurs dans l'équation du plan.

$2 \times 0 - y + 5 \times 0 - 6 = 0 \iff -y - 6 = 0 \iff y = -6$

Les coordonnées d'un point du plan (P) sont donc $\boxed{(0\ ;\ -6\ ;\ 0)}$

14.4 Positions relatives de deux plans

Propriété 14.9 (Plans parallèles ou sécants)

Soient $\vec{n_1}$ un vecteur normal à un plan (P_1) et $\vec{n_2}$ un vecteur normal à un plan (P_2).
- Les plans (P_1) et (P_2) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont colinéaires.
- Les plans (P_1) et (P_2) sont sécants si et seulement si les vecteurs $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas colinéaires.

Lorsque deux plans sont sécants, la définition ci-dessous permet de préciser ce que sont deux plans perpendiculaires.

Définition 14.9 (Plans perpendiculaires)

Soient $\vec{n_1}$ un vecteur normal à un plan (P_1) et $\vec{n_2}$ un vecteur normal à un plan (P_2).
Dire que les plans (P_1) et (P_2) sont perpendiculaires signifie que les vecteurs $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont orthogonaux.

14.5 Positions relatives d'une droite et d'un plan

Propriété 14.10 (Droite et plan sécants ou non)

Pour une droite (d) de l'espace, dirigée par un vecteur $\vec{u}$, et un plan (P) de vecteur normal $\vec{n}$,
- si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, la droite (d) et le plan (P) sont parallèles,
- sinon la droite (d) et le plan (P) sont sécants.

Propriété 14.11 (Droite et plan perpendiculaires ou non)

Pour une droite (d) de l'espace, dirigée par un vecteur $\vec{u}$, et un plan (P) de vecteur normal $\vec{n}$,
les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, si et seulement si la droite (d) et le plan (P) sont perpendiculaires,

Méthode 14.4 (Positions relatives d'une droite et d'un plan)

Pour une droite (d) de l'espace, dirigée par un vecteur $\vec{u}$, et un plan (P) de vecteur normal $\vec{n}$, comment déterminer leur position relative ?

- On calcule le produit scalaire $\vec{u}.\vec{n}$
- si $\vec{u}.\vec{n} = 0$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, donc la droite (d) et le plan (P) sont parallèles.
  - On choisit un point de la droite (d) et on vérifie si ce point appartient au plan (P).
  - Si ce point appartient au plan (P), la droite (d) est **incluse** dans le plan (P),
  - sinon la droite (d) est **strictement parallèle** au plan (P).
- si $\vec{u}.\vec{n} \neq 0$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux, donc la droite (d) et le plan (P) sont **sécants**.
  - si on veut savoir si (d) et (P) sont perpendiculaires, on utilise la propriété 14.11.

Exercice résolu : intersection d'une droite et d'un plan

Dans un repère orthonormé de l'espace, une équation cartésienne du plan (P) est $3x - 2y + z + 5 = 0$,

et une représentation paramétrique de la droite (d) est $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$

1. Justifier que le plan P et la droite (d) sont sécants.

2. On appelle A le point d'intersection du plan P et de la droite (d). Calculer les coordonnées du point A.

Corrigé

1. D'après la propriété 14.10 et la méthode 14.4, il nous faut un vecteur directeur $\vec{u}$ de (d) et un vecteur $\vec{n}$ normal à (P).
D'après l'énoncé on a : $\vec{u}(1\ ;\ 1\ ;\ -3)$ et $\vec{n}(3\ ;\ -2\ ;\ 1)$.
On calcule le produit scalaire $\vec{u}.\vec{n} = 1 \times 3 + 1 \times (-2) + (-3) \times 1 = -2 \neq 0$.
Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux, par conséquent, d'après la propriété 14.10, $\boxed{\text{le plan } P \text{ et la droite } (d) \text{ sont sécants}}$.

2. Calculons les coordonnées de A point d'intersection de (P) et (d).
On remplace respectivement x, y, z, par $2 + t$, t, $1 - 3t$ dans l'équation $3x - 2y + z + 5 = 0$.
On obtient : $3(2 + t) - 2t + (1 - 3t) + 5 = 0$ et on résout cette équation d'inconnue t.

$$\begin{aligned} 3(2+t) - 2t + (1-3t) + 5 = 0 &\iff 6 + 3t - 2t + 1 - 3t + 5 = 0 \\ &\iff -2t + 12 = 0 \\ &\iff -2t = -12 = 0 \\ &\iff t = 6 \end{aligned}$$

Dans la représentation paramétrique de (d), on remplace t par 6.

$$\begin{cases} x = 2 + 6 = 8 \\ y = 6 \\ z = 1 - 3 \times 6 = -17 \end{cases}$$

Donc les coordonnées de A sont $\boxed{A(8\ ;\ 6\ ;\ -17)}$.

14.6 Perpendiculaire commune à deux droites non coplanaires

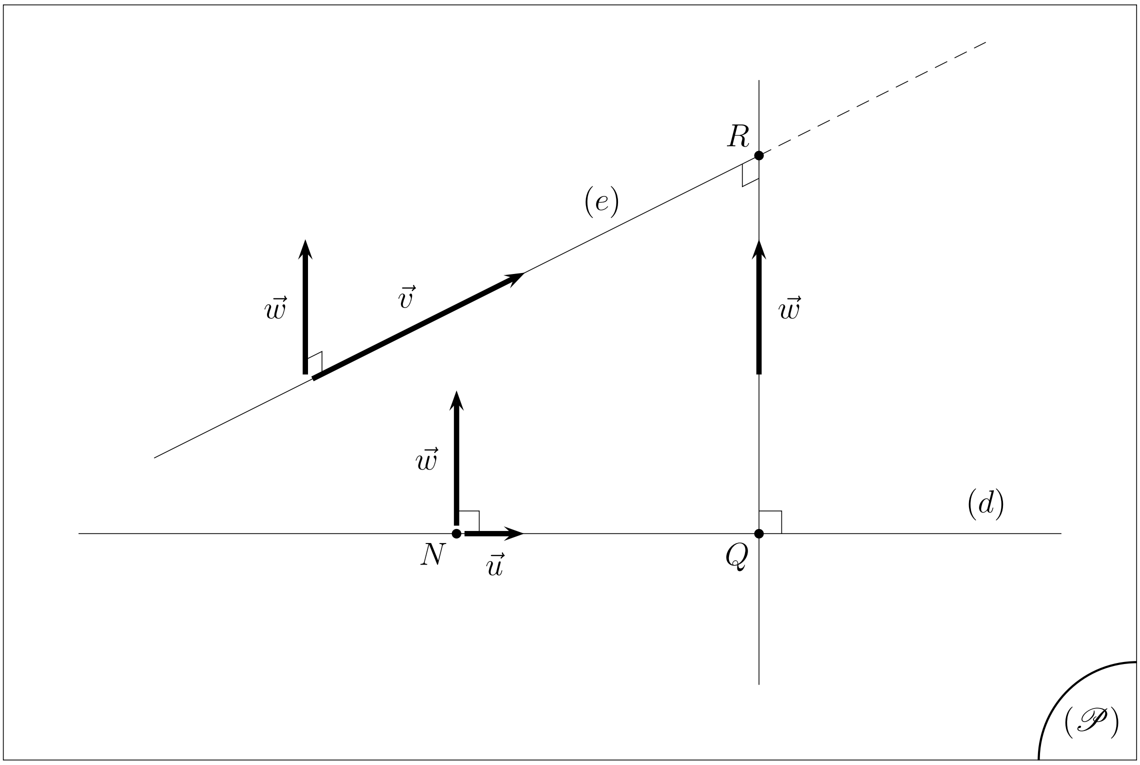
Un commentaire du programme de terminale S indique qu'il faut étudier la situation d'une perpendiculaire commune à deux droites non coplanaires.

Un exemple est traité en exercice, mais les propriétés et les démonstrations qui figurent dans ce paragraphe ne sont pas à connaître.

Elles peuvent être étudiées comme approfondissement.

Propriété 14.12

Pour deux droites non coplanaires, il existe une perpendiculaire commune à ces deux droites.



Démonstration

Soient (d) et (e) deux droites non coplanaires, et soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs directeurs respectifs de (d) et (e).

Démontrons qu'il existe une droite (Δ) qui est perpendiculaire à (d) et à (e).

Puisque les droites (d) et (e) ne sont pas coplanaires, elles ne sont pas parallèles, et par conséquent les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Soit $\vec{w}$ un vecteur non nul orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

Soit N un point de (d), et soit $(\mathscr{P})$ le plan $(N, \vec{u}, \vec{w})$.

Justifions que le plan $(\mathscr{P})$ et la droite (e) sont sécants.

La droite (e) ne peut être parallèle au plan $(\mathscr{P})$, car sinon les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ seraient coplanaires, par suite le vecteur $\vec{v}$ serait combinaison linéaire de $\vec{u}$ et de $\vec{w}$, et il existerait ainsi deux réels λ et μ tels que $\vec{v} = \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{w}$.

Or $\vec{w}$ est un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, de sorte que $\vec{u}.\vec{w} = 0$ et $\vec{v}.\vec{w} = 0$.

Ainsi $(\lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{w}).\vec{w} = 0 \iff (\lambda\,\vec{u}.\vec{w} + \mu\,\vec{w}).\vec{w} = 0$ or $\vec{u}.\vec{w} = 0$, donc $\mu\,\vec{w}^2 = 0$.

Comme le vecteur $\vec{w}$ n'est pas nul son carré scalaire $\vec{w}^2$ n'est pas nul, par conséquent $\mu = 0$.

Cela entraîne alors : $\vec{v} = \lambda\,\vec{u}$, ce qui est impossible puisque les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

La droite (e) ne donc peut être parallèle au plan $(\mathscr{P})$, de sorte que la droite (e) et le plan $(\mathscr{P})$ et sont sécants.

Nommons donc R le point d'intersection de la droite (e) et du plan $(\mathscr{P})$, et nommons (Δ) la droite $(R, \vec{w})$ c'est à dire la droite qui passe par le point (R) et de vecteur directeur $\vec{w}$.

Démontrons que la droite (Δ) est la droite que nous cherchons.

Démontrons d'abord que (Δ) est perpendiculaire à (e).

(Δ) est orthogonale à (e) puisque des vecteurs directeurs respectifs de ces deux droites sont $\vec{w}$ et $\vec{v}$ et sont orthogonaux, et comme (Δ) coupe (e) en R, (Δ) est perpendiculaire à (e) en R.

Démontrons maintenant que (Δ) est perpendiculaire à (d).

(Δ) est orthogonale à (d), puisque des vecteurs directeurs respectifs de ces deux droites sont $\vec{w}$ et $\vec{u}$ et sont orthogonaux.

Puisque $\vec{w}$ est un vecteur directeur de (Δ), et un des vecteurs directeurs du plan $(\mathscr{P})$, la droite (Δ) est parallèle au plan $(\mathscr{P})$, mais comme la droite (Δ) contient le point R qui est dans le plan $(\mathscr{P})$, la droite (Δ) est incluse dans le plan $(\mathscr{P})$.

Or le plan $(\mathscr{P})$ contient aussi la droite (d), donc les droites (Δ) et (d) sont orthogonales et coplanaires, de sorte que (Δ) et (d) sont perpendiculaires, et nous pouvons nommer Q leur point d'intersection.

La démonstration précédente donne en fait une méthode pour construire la perpendiculaire commune à deux droites. Cette méthode est récapitulée ci-dessous.

Méthode 14.5 (Construire la perpendiculaire commune à deux droites)

Soient (d) et (e) deux droites non coplanaires, et soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs directeurs respectifs de (d) et (e).

Soit $\vec{w}$ un vecteur non nul orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

Soit N un point de (d), et soit $(\mathscr{P})$ le plan $(N, \vec{u}, \vec{w})$.

La droite (e) coupe le plan $(\mathscr{P})$ en un point R.

La perpendiculaire commune aux deux droites (d) et (e) est la droite (Δ) qui passe par le point (R) de vecteur directeur $\vec{w}$.

La droite (Δ) coupe la droite (d) en un point Q.

Exemple 14.1 (Perpendiculaire commune avec des représentations paramétriques)

Voici les représentations paramétriques de deux droites (d) et (e).

$$(d)\ \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 3 - t \end{cases} \qquad (e)\ \begin{cases} x = 2 \\ y = t' \\ z = 4 + t' \end{cases}$$

Déterminons le point M de (d) et le point M de (e) tels que la droite (MM') soit la perpendiculaire commune aux droites (d) et (e).

D'après ces représentations paramétriques, les vecteurs $\vec{u}(1\ ;\ 0\ ;\ -1)$ et $\vec{v}(0\ ;\ 1\ ;\ 1)$ sont deux vecteurs directeurs respectifs de (d) et (e).

Un point M de (d) a comme coordonnées $(t\ ;\ 0\ ;\ 3 - t)$

Un point M' de (e) a comme coordonnées $(2\ ;\ t'\ ;\ 4 + t')$

Donc le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a comme coordonnées $(2 - t\ ;\ t'\ ;\ t + t' + 1)$.

Puisque la droite (MM') est perpendiculaire aux droites (d) et (e), on a $\vec{u}.\overrightarrow{MM'} = 0$ et $\vec{v}.\overrightarrow{MM'} = 0$.

On a donc :

$$\begin{cases} 1 \times (2-t) + 0 \times t' + (-1) \times (t + t' + 1) = 0 \\ 0 \times (2-t) + 1 \times t' + 1 \times (t + t' + 1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2t - t' + 1 = 0 \\ t + 2t' + 1 = 0 \end{cases}$$

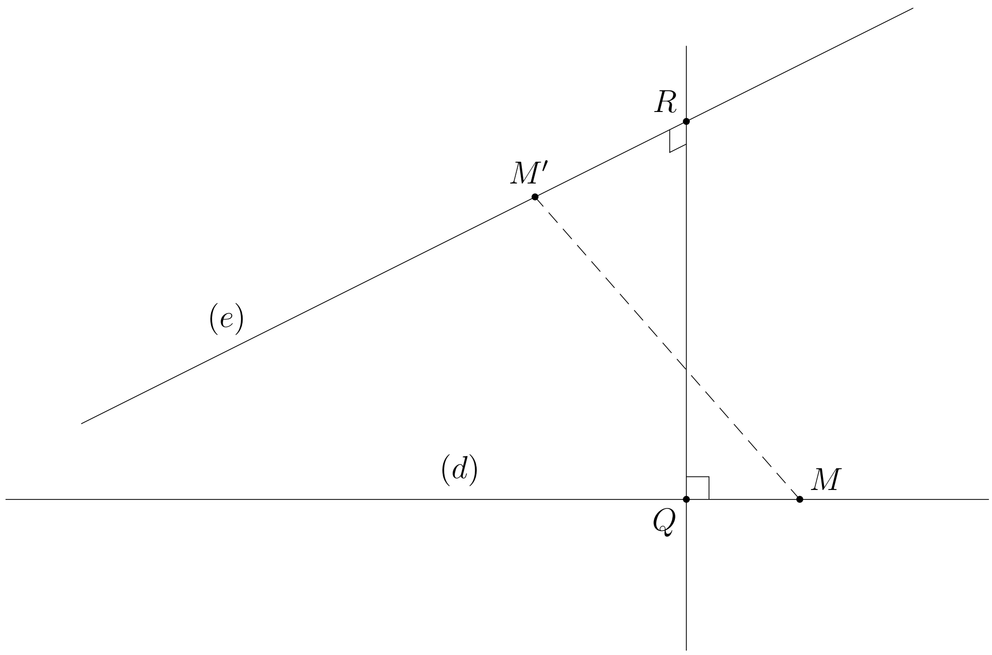
On résout le système et on obtient $t = 1$ et $t' = -1$.

On en déduit les coordonnées de M et de M' : $\boxed{M\,(1\ ;\ 0\ ;\ 2) \text{ et } M'\,(2\ ;\ -1\ ;\ 3)}$.

Propriété 14.13 (Plus courte distance entre deux droites non coplanaires)

Pour deux droites non coplanaires (d) et (e), de perpendiculaire commune (Δ), on appelle Q et$R$ les points d'intersection respectifs de (Δ) avec (d) et (e).

Alors la distance QR est la plus courte distance entre un point de (d) et un point de (e).



Démonstration

On considère un point quelconque M de la droite (d) et un point quelconque M' de droite (e).

Démontrons que $MM' \geqslant QR$.

Pour éviter des écritures avec des symboles de racines carrées, considérons MM'^2 le carré de la distance MM' qui est aussi le carré scalaire du vecteur $\overrightarrow{MM'}$, autrement dit :

$MM'^2 = \overrightarrow{MM'}^2 = \overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{MM'}$

En utilisant la relation de Chasles, on peut décomposer le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ ainsi :

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RM'}$.

On a donc :

$$\begin{aligned} MM'^2 &= (\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RM'})^2 \\ &= ((\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{RM'}) + \overrightarrow{QR})^2 \\ &= (\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{RM'})^2 + 2\,(\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{RM'}).\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{QR}^2 \\ &= (\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{RM'})^2 + 2\,\overrightarrow{MQ}.\overrightarrow{QR} + 2\,\overrightarrow{RM'}.\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{QR}^2 \end{aligned}$$

Sur la droite (d), le point M peut être confondu ou non avec le point Q, et de même pour les points M' et R. Étudions donc les différents cas.

- Cas où $M \neq Q$ et $M' \neq R$.
  Les droites (MQ), (RM') (QR) sont les droites respectives (d), (e), et Δ,
  donc $(MQ) \perp (QR)$, $(RM') \perp (QR)$, par conséquent $\overrightarrow{MQ}.\overrightarrow{QR} = 0$ et $\overrightarrow{RM'}.\overrightarrow{QR} = 0$
  On obtient ainsi : $MM'^2 = (\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{RM'})^2 + QR^2$
  Or, dans ce cas $(\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{RM'})^2 > 0$, en effet si ce carré est nul alors $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{RM'} = \vec{0}$, par suite $\overrightarrow{MQ} = -\overrightarrow{RM'}$, ce qui est impossible puisque les vecteurs $\overrightarrow{MQ}$ et $\overrightarrow{RM'}$ ne peuvent pas être colinéaires du fait que les droites (d), (e), ne sont pas coplanaires.
  Lorsque $M \neq Q$ et $M' \neq R$, on a donc $(\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{RM'})^2 > 0$, si bien que $MM'^2 > QR^2$, donc $MM' > QR$.

- Cas où $M \neq Q$ et $M' = R$.
  On a : $MM'^2 = MR^2 = (\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QR})^2 = \overrightarrow{MQ}^2 + 2\,\overrightarrow{MQ}.\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{QR}^2$
  Or $\overrightarrow{MQ}.\overrightarrow{QR} = 0$, donc : $MM'^2 = MR^2 = MQ^2 + QR^2 > QR^2$ car $M \neq Q$
  Lorsque $M \neq Q$ et $M' = R$, on a donc $MM' > QR$.
- Cas où $M = Q$ et $M' \neq R$
  On a de manière analogue au cas précédent :
  $MM'^2 = QM'^2 = QR^2 + RM'^2 > QR^2$ car $M' \neq R$
  Lorsque $M = Q$ et $M' \neq R$, on a donc $MM' > QR$.
- Cas où $M = Q$ et $M' = R$.
  On a alors tout simplement $MM' = QR$.

Donc, pour un point quelconque M de la droite (d) et un point quelconque M' de droite (e), nous avons bien démontré que $MM' \geqslant QR$.

Nous avons aussi démontré que la distance QR est la plus courte distance entre un point M de (d) et un point M' de (e) puisque, dès que $M \neq Q$ ou $M' \neq R$, on a $MM' > QR$.

Chapitre 15

Loi normale

I Exercices

15.1 Loi normale centrée réduite

Exercice 15.1

Un téléopérateur téléphone successivement à 4 personnes susceptibles d'être intéressées par sa proposition. Quelle que soit la personne appelée, la probabilité qu'elle soit intéressée est égale à 0,6.

X est la variable aléatoire égale au nombre de personnes intéressées (ce n'est donc pas une variable continue).

1. Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucune personne intéressée.
2. Même question pour 1, puis, 2, puis 3, puis 4 personnes intéressées.
3. Compléter le tableau ci-dessous, qui donne la loi de probabilité de X. Arrondir à 10^{-4} près.

x_i	0	1	2	3	4
p_i					

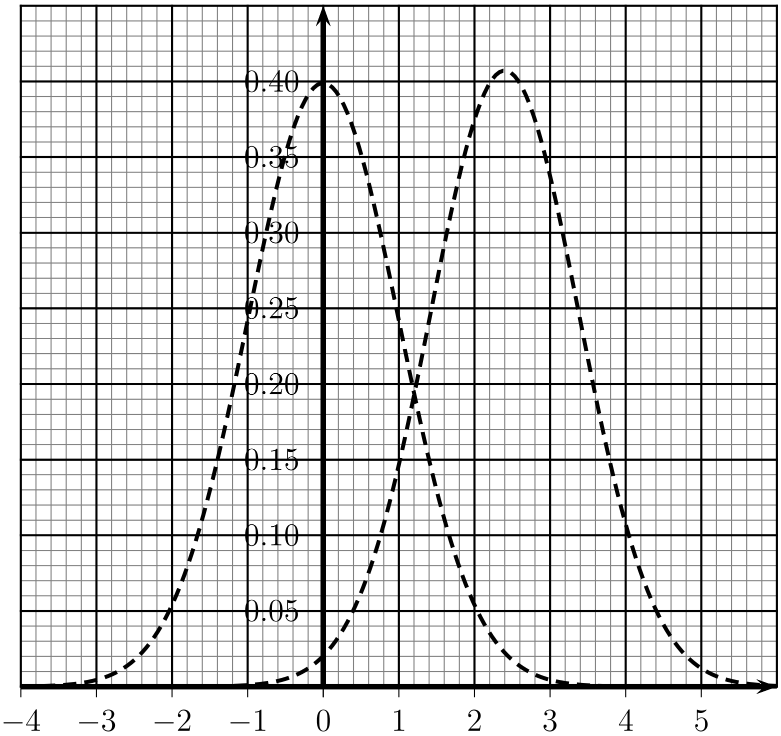
4. Calculer l'espérance de X, qui sera nommée μ[1] et calculer l'écart-type σ. Arrondir à 10^{-2} près.
5. Tracer ci-dessous la représentation graphique de la loi de cette variable aléatoire, sous forme de diagramme bâtons.
6. On définit la variable aléatoire Y égale à $\dfrac{\mathrm{X}-\mu}{\sigma}$. Compléter le tableau ci-dessous.

y_i					
p_i					

Arrondir à 10^{-2} près pour y_i et 10^{-4} près pour p_i.

7. Vérifier que $\mathrm{E(Y)} = 0$ et que $\sigma(\mathrm{Y}) = 1$.
   On dit que Y est la variable aléatoire centrée réduite de X, centrée parce que $\mathrm{E(Y)} = 0$ et réduite parce que $\sigma(\mathrm{Y}) = 1$.
8. Tracer ci-dessous la représentation graphique de la loi de cette variable aléatoire Y, sous forme de diagramme bâtons.

1. μ est une lettre grecque qu'on prononce « mu ».



Deux courbes sont tracées en pointillés sur le graphique. On les appelle parfois **« courbes en cloche » ou « courbes de Gauss ».**

Celle de gauche représente la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

Cette fonction est la densité d'une variable aléatoire (continue) qui suit la **loi normale centrée réduite**.

Sa courbe représentative en pointillés suit approximativement les sommets des bâtons du 2e diagramme.

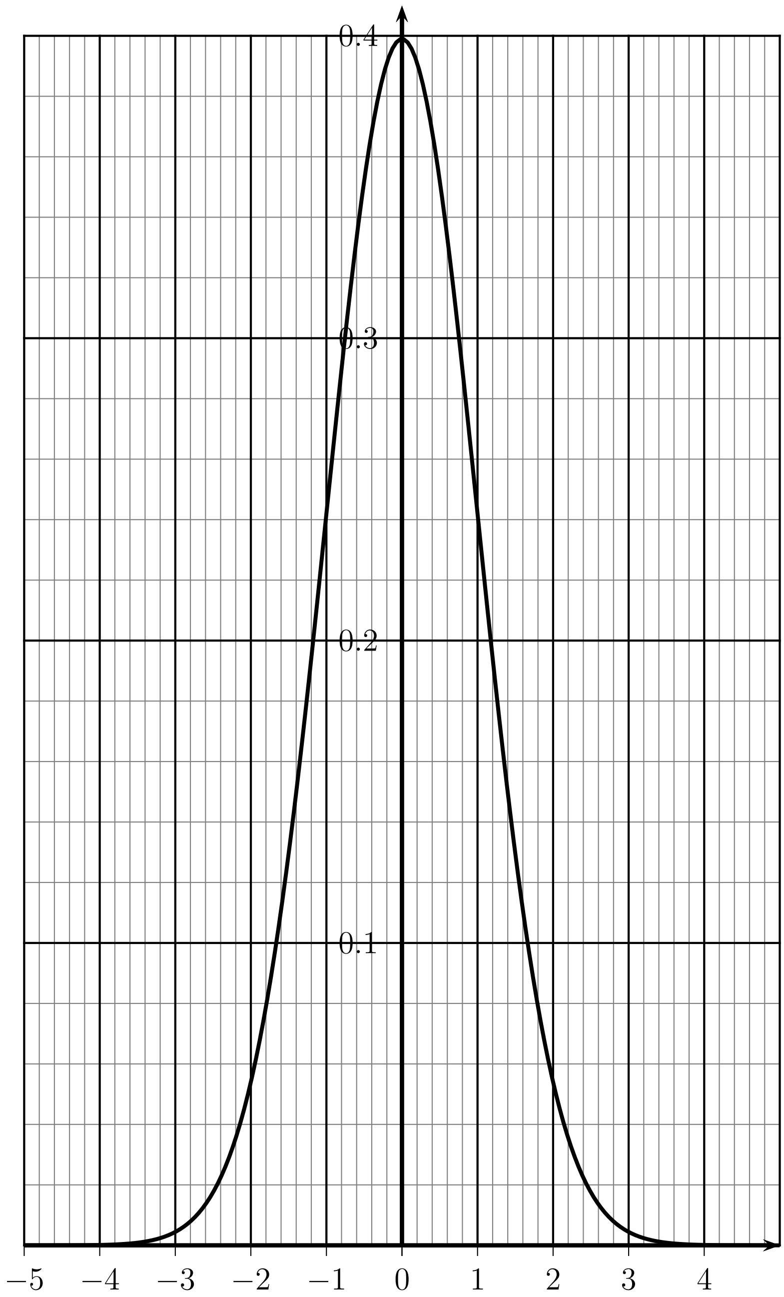
La courbe de droite représente la densité d'une variable aléatoire (continue) qui suit la **loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ**

Sa courbe représentative en pointillés suit approximativement les sommets des bâtons du premier diagramme.

Si l'on reprenait l'exercice avec un logiciel et une loi binômiale $\mathscr{B}(20\ ;\ 0,6)$. On obtiendrait des diagrammes de 21 bâtons plus serrés et faisant apparaître de manière plus évidente ces fameuses « courbes en cloches ».

Exercice 15.2

La fonction représentée à droite est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$
Cette fonction est la densité d'une variable aléatoire X qui suit la **loi normale centrée réduite** notée $\mathcal{N}(0,1)$.



Partie A

1. **a)** Représenter sur le graphique la probabilité $p(1,2 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 1,8)$
   b) Calculer cette probabilité avec la calculatrice, de la manière suivante :
   sur la calculatrice TI 82, appuyer sur $\boxed{\text{2nde}}$ [distrib] puis choisir `2:normalFRép(`
   Compléter ainsi et valider :
   `normalFRép(1.2,1.8,0,1)`
   Arrondir à 10^{-3} près.
2. Mêmes consignes a) et b) pour $p(\mathrm{X} \geqslant 2)$. Pour la calculatrice on considérera que :
   $p(\mathrm{X} \geqslant 2) = p(2 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 10^{99})$
3. Mêmes consignes a) et b) pour $p(\mathrm{X} \leqslant -2)$. Pour la calculatrice on considérera que :
   $p(\mathrm{X} \leqslant -2) = p(-10^{99} \leqslant \mathrm{X} \leqslant -2)$

Partie B

1. Calculer les probabilités suivantes en indiquant le lien avec les probabilités de la partie A.
   a) $p(\mathrm{X} < 2)$ **b)** $p(-1,8 \leqslant \mathrm{X} \leqslant -1,2)$
2. Sans calculatrice, calculer $p(\mathrm{X} \geqslant 0)$.
3. Sans utiliser la commande `normalFRép`, calculer les probabilités suivantes :
   a) $p(\mathrm{X} < 0)$ **b)** $p(0 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 2)$ **c)** $p(-2 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 0)$

Partie C

1. Avec la calculatrice, calculer : $p(\mathrm{X} \leqslant 1)$.
2. Où se situe approximativement le nombre a tel que $p(\mathrm{X} \leqslant a) = 0,7$?
3. Déterminer ce nombre a avec la calculatrice, de la manière suivante :
   sur la calculatrice TI 82, appuyer sur $\boxed{\text{2nde}}$ [distrib] puis choisir `3:FracNormale(`
   Compléter ainsi et valider : `FracNormale(0.7)`

15.2 Loi normale

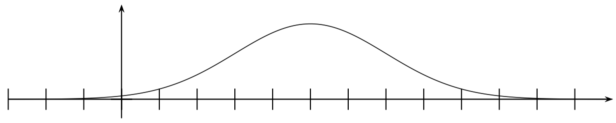
Exercice 15.3

Une variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne $\mu = 5$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

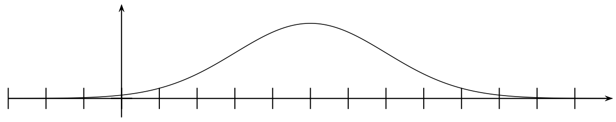
Calculer chaque fois la probabilité indiquée à la calculatrice puis mettre en évidence cette probabilité sur la figure, en hachurant ou coloriant.

Pour la calculatrice, voir le cours sur fiche, paragraphe 15.3, page 263.

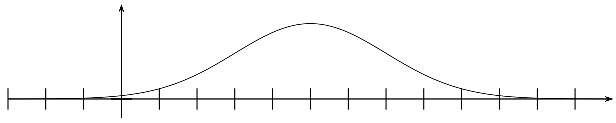
1. $p(4 < X < 7) \approx$ ....



2. $p(X < 6) \approx$ ....



3. $p(X > 8) \approx$ ....



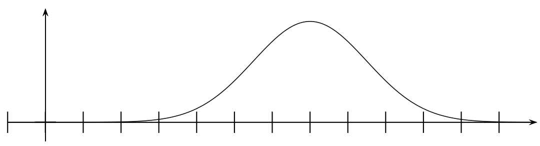
Exercice 15.4

Une variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne $\mu = 7$. Déterminer les probabilités suivantes. Mettre en évidence sur la figure, en hachurant ou coloriant.

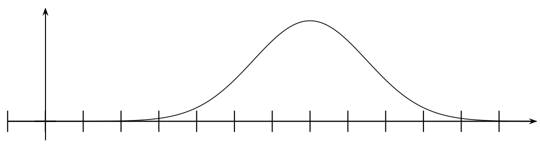
1. On donne : $p(X < 4) \approx 0,023$.

Calculer $p(X \geqslant 4)$ ....

....



2. Compléter : $p(X < 7) =$ ....

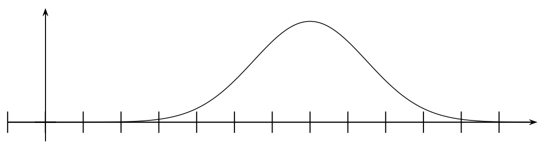


3. On donne : $p(5 < X < 7) \approx 0,41$. Compléter ci-dessous, en écrivant un calcul si nécessaire.

a) $p(X \leqslant 5) \approx$ ....

b) $p(7 < X < 9) \approx$ ....

c) $p(X \geqslant 9) \approx$ ....

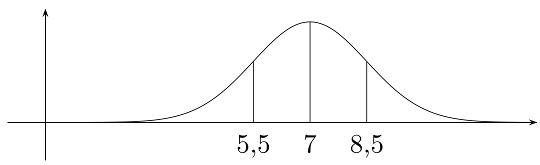


4. On donne : $p(X > 8,5) \approx 0,16$.

Calculer $p(5,5 < X < 8,5)$ ....

....

....



Exercice 15.5

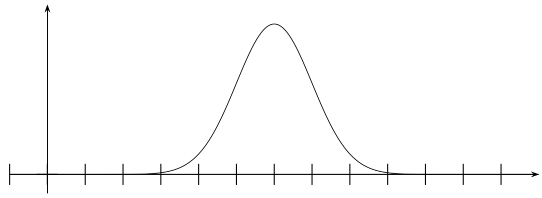
Une variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne $\mu = 6$ et d'écart-type $\sigma = 1$. Déterminer chaque fois le nombre a. Écrire les calculs si nécessaire et mettre en évidence sur la figure, en hachurant ou coloriant.

Pour la calculatrice, voir le cours sur fiche, paragraphe 15.3, à la rubrique *sachant que* $p(X \leqslant a) = c$, *déterminer* a *à partir de* c.

1. $p(X < a) = 0,8$

. . . .

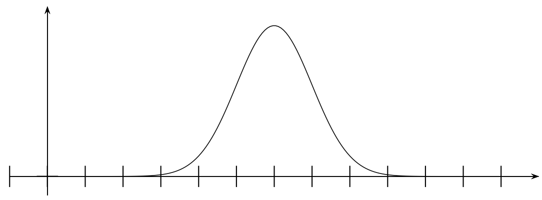
. . . .



2. $p(X > a) = 0,7$

. . . .

. . . .



Exercice 15.6

Une usine fabrique des pièces qui doivent avoir une épaisseur comprise entre 1,35 et 1,65 mm. Si l'épaisseur d'une pièce n'est pas comprise entre ces deux valeurs, elle n'est pas vendue.

On prélève une pièce au hasard dans la production de l'usine, et on appelle X la variable aléatoire égale à l'épaisseur de la pièce en mm.

On suppose que X suit la loi normale de moyenne $\mu = 1,5$ et d'écart-type $\sigma = 0,07$.

1. Calculer la probabilité que la pièce prélevée soit vendue.

2. Calculer la probabilité que l'épaisseur de la pièce soit inférieure à 1,3 mm.

3. Calculer la probabilité que l'épaisseur de la pièce soit supérieure à 1,8 mm.

Exercice 15.7

On tire au hasard un sachet de farine dans la production d'une entreprise agro-alimentaire.

On appelle X la variable aléatoire égale au poids en grammes de ce sachet. Cette variable aléatoire suit une loi normale $\mathscr{N}(1\,020\ ;\ 625)$.

1. Quel est l'écart-type σ de cette loi normale ?

2. Calculer la probabilité qu'un sachet pèse plus de 1 050 grammes.

3. Calculer la probabilité que le poids d'un sachet soit compris entre 990 et 1 035 grammes.

4. Déterminer le poids de sachet s tel que seulement 5 % de la production ait un poids inférieur à ce poids. Arrondir à l'unité.

Exercice 15.8

Une entreprise produit des flacons d'un médicament. Une usine A produit 40 % de ces flacons, et le reste est produit dans l'usine B.

Pour les flacons de l'usine A, on a constaté que la variable aléatoire X égale au volume en mL d'un flacon suit une loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart-type 4.

Pour les flacons de l'usine B, on a constaté que la variable aléatoire Y égale au volume en mL d'un flacon suit une loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart-type 6.

1. Calculer la probabilité qu'un flacon prélevé au hasard dans la production de l'usine A ait un volume compris entre 245 et 255 mL.
2. Calculer la probabilité qu'un flacon prélevé au hasard dans la production totale de l'entreprise ait un volume compris entre 245 et 255 mL.

Exercice 15.9

Dans un magasin, le nombre X d'exemplaires vendus en un mois d'un article suit une loi normale de moyenne $m = 800$ et d'écart-type $s = 30$.

Le responsable du magasin veut connaître le nombre n d'exemplaires qu'il doit avoir en stock en début de mois, pour que la probabilité d'être en rupture de stock en cours de mois soit inférieure à 0,05. On ne réalimente pas le stock en cours de mois.

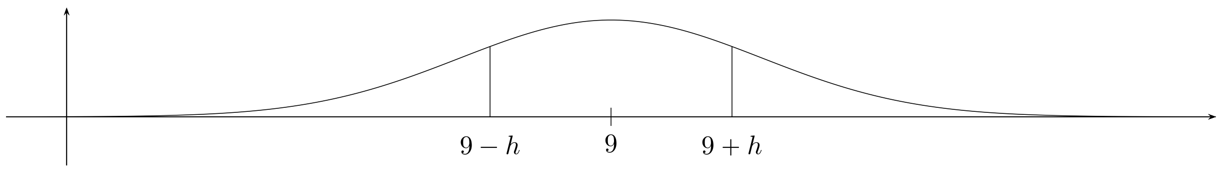
Déterminer la plus petite valeur de l'entier n remplissant cette condition.

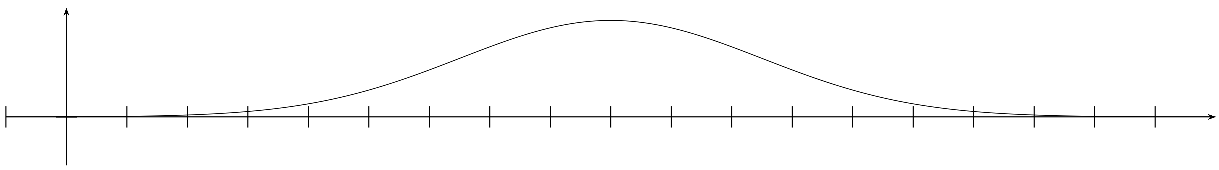
Exercice 15.10

Une variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne $\mu = 9$ et d'écart-type $\sigma = 2,5$.

Déterminer h tel que $p(9 - h \leqslant X \leqslant 9 + h) = 0,8$.

La première figure ci-dessous est un schéma et on complétera la deuxième quand on aura trouvé h.





Exercice 15.11

Un lot de fruits a été calibré. On admet que le poids X d'un fruit suit une loi normale $\mathcal{N}(90\ ;\ 9)$.

On veut déterminer un intervalle de poids centré sur 90 g pour que 98 % des fruits soient dans cet intervalle, autrement dit, on veut déterminer un nombre positif a tel que :

$P(90 - a \leqslant X \leqslant 90 + a) = 0,98$.

Calculer ce nombre a.

Exercice 15.12

Une variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ.

On appelle $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ la variable centrée réduite.

1. Rappeler la loi suivie par la variable aléatoire Z.
2. Calcul de $p(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$.

   a) Démontrer que : $\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma \iff -2 < Z < 2$.

   b) En déduire la valeur approchée à 10^{-4} près de $p(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$.

   Remarque : on démontre de manière analogue qu'une variable aléatoire X qui suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ vérifie les égalités ci-dessous.
   $p(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,683$ et $p(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,997$.

3. Déterminer u tel que $p(\mu - u\,\sigma < X < \mu + u\,\sigma) = 0,95$.

a) Démontrer que $\mu - u\,\sigma < X < \mu + u\,\sigma \iff -u < Z < u$.

b) En déduire $p(Z < u)$.

c) Déterminer u au centième près.

Exercice 15.13

Une menuiserie fabrique des barres de bois dont la longueur doit être de 250 cm. On appelle X la variable aléatoire égale à la longueur d'une barre en cm choisie au hasard dans la production.

Cette variable aléatoire suit une loi normale de moyenne $\mu = 250$.

On peut régler la machine pour faire varier l'écart-type σ.

La probabilité que la longueur d'une barre choisie au hasard soit comprise entre 248 et 252 est égale à 0,9.

1. Calculer la probabilité que la longueur d'une barre choisie au hasard soit inférieure ou égale à 248 cm.

2. On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{X - 250}{\sigma}$.

a) Quelle est la loi de probabilité suivie par Z ?

b) Justifier que $P(X \leqslant 248) = P\left(Z \leqslant \dfrac{-2}{\sigma}\right)$.

c) En déduire la valeur de σ arrondie au dixième près.

Exercice 15.14

1. La masse en grammes X d'un objet produit par une usine est une variable aléatioire qui suit une loi normale de moyenne $\mu = 750$ et d'écart-type $\sigma = 15$.

On choisit un objet au hasard. Calculer la probabilité que sa masse soit inférieure à 765 g.

2. En conservant la valeur de l'écart-type, quelle masse moyenne m faudrait-il obtenir pour la probabilité que sa masse soit inférieure à 765 g soit égale à 0,9.

Indications

- on appelle Y la variable aléatioire qui suit cette nouvelle loi normale de moyenne m et d'écart-type $\sigma = 15$.
- on appelle Z la variable centrée réduite, $Z = \dfrac{Y - m}{15}$
- démontrer que $Y < 765 \iff Z < \dfrac{765 - m}{15}$

15.3 Exercices de bac

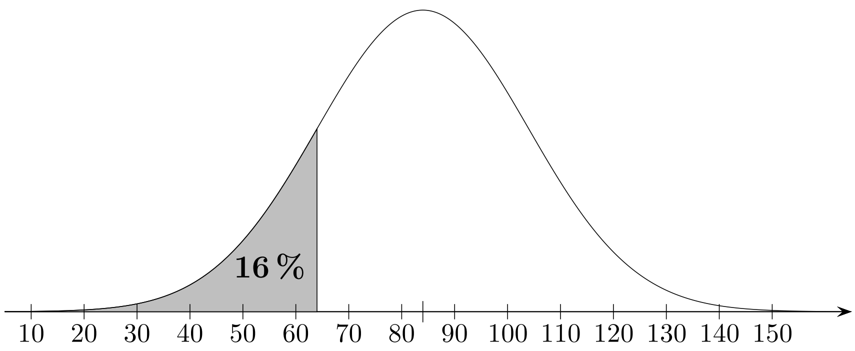
Exercice 15.15 (Bac S, Pondichéry, avril 2015, ex 3)

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A Étude de la durée de vie d'un appareil électroménager

Des études statistiques ont permis de modéliser la durée de vie, en mois, d'un type de lave-vaisselle par une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\ \sigma^2)$ de moyenne $\mu = 84$ et d'écart-type σ. De plus, on a $P(X \leqslant 64) = 0,16$.

La représentation graphique de la fonction densité de probabilité de X est donnée ci-dessous.



1. a) En exploitant le graphique, déterminer $P(64 \leqslant X \leqslant 104)$.
   b) Quelle valeur approchée entière de σ peut-on proposer ?
2. On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{X-84}{\sigma}$.
   a) Quelle est la loi de probabilité suivie par Z ?
   b) Justifier que $P(X \leqslant 64) = P\left(Z \leqslant \dfrac{-20}{\sigma}\right)$.
   c) En déduire la valeur de σ, arrondie à 10^{-3}.
3. Dans cette question, on considère que $\sigma = 20,1$.
   Les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3}.
   a) Calculer la probabilité que la durée de vie du lave-vaisselle soit comprise entre 2 et 5 ans.
   b) Calculer la probabilité que le lave-vaisselle ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

Partie B Étude de l'extension de garantie d'El'Ectro

Le lave-vaisselle est garanti gratuitement pendant les deux premières années.

L'entreprise El'Ectro propose à ses clients une extension de garantie de 3 ans supplémentaires.

Des études statistiques menées **sur les clients qui prennent l'extension de garantie** montrent que 11,5 % d'entre eux font jouer l'extension de garantie.

1. On choisit au hasard 12 clients parmi ceux ayant pris l'extension de garantie (on peut assimiler ce choix à un tirage au hasard avec remise vu le grand nombre de clients).
   a) Quelle est la probabilité qu'exactement 3 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Détailler la démarche en précisant la loi de probabilité utilisée. Arrondir à 10^{-3}.
   b) Quelle est la probabilité qu'au moins 6 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Arrondir à 10^{-3}.
2. L'offre d'extension de garantie est la suivante : pour 65 euros supplémentaires, El'Ectro remboursera au client la valeur initiale du lave-vaisselle, soit 399 euros, **si une panne irréparable survient entre le début de la troisième année et la fin de la cinquième année**. Le client ne peut pas faire jouer cette extension de garantie si la panne est réparable.
   On choisit au hasard un client parmi les clients ayant souscrit l'extension de garantie, et on note Y la variable aléatoire qui représente le gain algébrique en euros réalisé sur ce client par l'entreprise El'Ectro, grâce à l'extension de garantie.

   a) Justifier que Y prend les valeurs 65 et -334 puis donner la loi de probabilité de Y.

b) Cette offre d'extension de garantie est-elle financièrement avantageuse pour l'entreprise ? Justifier.

Exercice 15.16 (Bac S, Polynésie, juin 2015, ex 3)

Dans un pays, la taille en centimètres des femmes de 18 à 65 ans peut être modélisée par une variable aléatoire X_1 suivant la loi normale d'espérance $\mu_1 = 165$ cm et d'écart-type $\sigma_1 = 6$ cm, et celle des hommes de 18 à 65 ans, par une variable aléatoire X_2 suivant la loi normale d'espérance $\mu_2 = 175$ cm et d'écart-type $\sigma_2 = 11$ cm.

Dans cet exercice tous les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

1. Quelle est la probabilité qu'une femme choisie au hasard dans ce pays mesure entre 1,53 mètre et 1,77 mètre ?

2. a) Déterminer la probabilité qu'un homme choisi au hasard dans ce pays mesure plus de 1,70 mètre.

b) De plus, on sait que dans ce pays les femmes représentent 52 % de la population des personnes dont l'âge est compris entre 18 et 65 ans. On choisit au hasard une personne qui a entre 18 et 65 ans. Elle mesure plus de $1,70$ m. Quelle est la probabilité que cette personne soit une femme ?

15.4 Pour réviser

Chapitre du livre n° 15 – Lois normales

Les exercices résolus

- ex 1 p 401 : calculs de probabilité avec la loi normale centrée réduite, explique l'utilisation des calculatrices et du tableur.
- ex 6 p 403 : loi normale centrée réduite, équations d'inconnue u du type $p(X < u) = a$, $p(X > u) = a$, $p(-u < X < u) = a$, où le nombre a est donné.
  L'utilisation des calculatrices et de `FracNormale` ou de `Inverse Normal` est bien expliqué.

Rubrique *Pour s'exercer*, corrigés page 469

- ex 2 p 401 : calculs de probabilité avec la loi normale centrée réduite
- ex 7 p 403 : loi normale centrée réduite, équations d'inconnue u du type $p(X < u) = a$, $p(X > u) = a$, $p(-u < X < u) = a$, où le nombre a est donné.
- ex 13 p 405 : calculs de probabilité avec une loi normale

Rubrique *Objectif bac*, corrigés page

- ex 58 p 411 : Vrai/Faux, fait comparer deux lois normales graphiquement
- ex 59 p 412 : exercice de type bac, fait revoir plusieurs chapitres de probabilité
- ex 60 p 413 : exercice du même type que l'exercice n° 15.13

II Cours

Rappelons que les lois à densité ont été définies au chapitre 13.

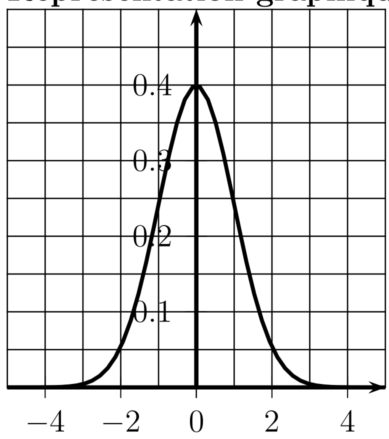
15.1 Loi normale centrée réduite $\mathscr{N}(0, 1)$

15.1.a Définition et représentation graphique

Définition 15.1

Dire qu'une variable aléatoire X suit la **loi normale centrée réduite**, notée $\mathscr{N}(0, 1)$ signifie que sa densité est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

Représentation graphique



Comme pour toutes les lois à densité, une probabilité se calcule à l'aide d'une intégrale avec la formule $p(c \leqslant \mathrm{X} \leqslant d) = \displaystyle\int_c^d f(t)\,dt$

Pour calculer une intégrale, il faudrait déterminer une primitive mais on ne connaît pas de primitive de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

Pour le calcul des probabilités avec la loi normale centrée réduite, on aura donc besoin

- des propriétés du paragraphe 15.1.c ;
- des commandes de la calculatrice indiquées au paragraphe 15.3

15.1.b Espérance, variance, écart-type

Propriété 15.1

Pour une variable aléatoire X qui suit la loi normale centrée réduite,

- son espérance est : $E(X) = 0$
- sa variance et son écart-type sont : $V(X) = 1$ et $\sigma(X) = 1$

15.1.c Propriétés

La fonction de densité de la loi normale centrée réduite est définie sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$, par conséquent : $p(-\infty < X < x + \infty) = 1$ ce qui signifie que l'aire sous la courbe de $-\infty$ à $+\infty$ est égale à 1.

D'autre part cette fonction est paire, donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. On en déduit des propriétés de calcul.

Tout cela est récapitulé ci-dessous.

Propriété 15.2

Pour une variable aléatoire X qui suit la loi normale centrée réduite et pour tout réel a :

- $p(-\infty < X < +\infty) = 1$
- $p(X \leqslant 0) = p(X \geqslant 0) = 0,5$
- $p(-a \leqslant X \leqslant 0) = p(0 \leqslant X \leqslant a)$
- $p(-a \leqslant X \leqslant a) = 2 \times p(0 \leqslant X \leqslant a)$
- $p(X \geqslant a) = p(X \leqslant -a)$

15.1.d Autre propriété

Propriété 15.3

Pour un nombre α de l'intervalle $]0,1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que :
$P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$ lorsque X suit la loi normale $\mathscr{N}(0,1)$.

Exemple

Si $\alpha = 0,2$ on a $1 - \alpha = 0,8$.

D'après cette propriété, il existe un unique nombre $u > 0$ tel que $P(-u \leqslant X \leqslant u) = 0,8$.

Nous allons d'abord calculer $P(X \leqslant -u)$, puis nous utiliserons la calculatrice pour déterminer u.

On sait que $P(-u \leqslant X \leqslant u) = 2 \times P(-u \leqslant X \leqslant 0)$ donc $P(-u \leqslant X \leqslant 0) = \dfrac{0,8}{2} = 0,4$.

Or : $P(X \leqslant -u) + P(-u \leqslant X \leqslant 0) = P(X \leqslant 0) = 0,5$

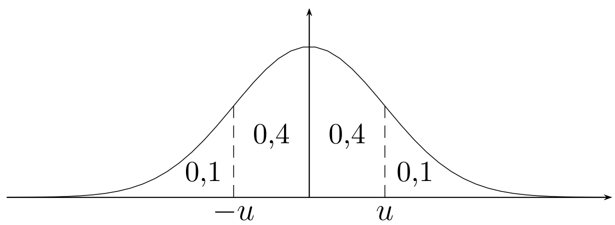
Donc : $P(X \leqslant -u) = 0,5 - P(-u \leqslant X \leqslant 0) = 0,5 - 0,4 = 0,1$

On utilise maintenant la commande :

`FracNormale(0.1,0,1)`

On obtient : $-u \approx -1,281$

soit $u \approx 1,281$



Deux exemples à retenir

Si $\alpha = 0,05$, on a $1 - \alpha = 0,95$ et on obtient de manière analogue $u \approx 1,96$.

Si $\alpha = 0,01$, on a $1 - \alpha = 0,99$ et on obtient de manière analogue $u \approx 2,58$.

On retiendra cela sous la forme ci-dessous.

Propriété 15.4

Pour une variable aléatoire X qui suit la loi normale centrée réduite :
$p(-1,96 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 1,96) \approx 0,95$ et $p(-2,58 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 2,58) \approx 0,99$

15.2 Loi normale $\mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$

15.2.a Définition et représentation graphique

Définition 15.2

Dire qu'une variable aléatoire X suit une loi normale $\mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$ signifie que la variable aléatoire $\dfrac{\mathrm{X} - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathscr{N}(0 ; 1)$.

Remarque hors programme

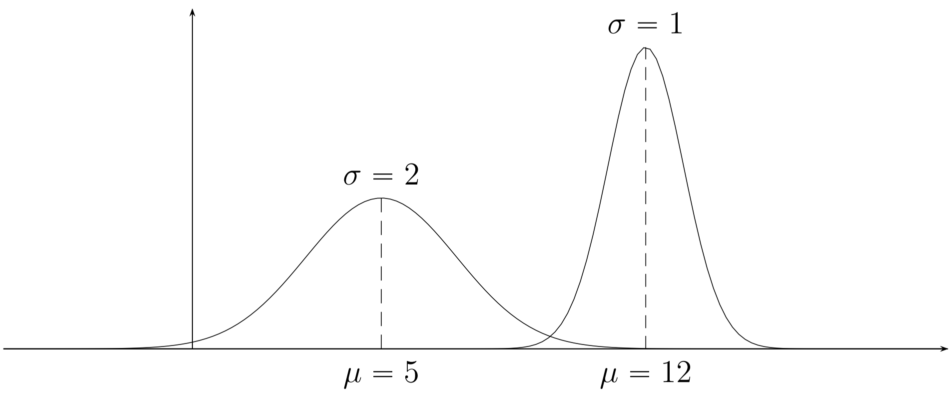
La fonction de densité d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ mais cette fonction n'est pas à connaître, elle n'est pas au programme.

Représentation graphique

Ci-dessous, deux exemples de fonction de densité de loi normale, à gauche $\mu = 5$ et $\sigma = 2$ et à droite $\mu = 12$ et $\sigma = 1$.

On remarque que :

- chaque courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$;
- la forme de la courbe dépend de la valeur de σ.



15.2.b Espérance, variance, écart-type

Propriété 15.5

Si une variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors son espérance est égale à μ et son écart-type est égal à σ.

Remarque : il faudra donc être vigilant dans les exercices. Par exemple si une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(120, 16)$, cela signifie que $\mu = 120$ et que $\sigma = 4$.

Vocabulaire − Moyenne

On sait que lorsqu'une expérience aléatoire fait intervenir une variable aléatoire, et que le nombre de répétitions de l'expérience est grand, la moyenne de cette variable est proche de l'espérance mathématique.

Une variable aléatoire X qui suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est souvent appelée la loi normale de **moyenne** μ et d'écart-type σ.

15.2.c Propriétés

Comme pour la loi normale centrée réduite on a : $p(-\infty < X < +\infty) = 1$

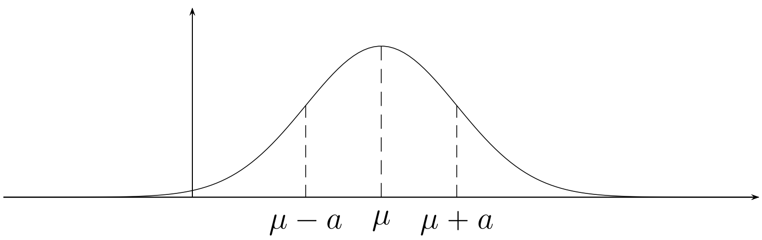
D'autre part la courbe de cette fonction est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$, on en déduit des propriétés de calcul.

Tout cela est récapitulé ci-dessous.

Propriété 15.6

Pour une variable aléatoire X qui suit une loi normale de moyenne μ et pour tout réel a :

- $p(-\infty < X < +\infty) = 1$
- $p(X \leqslant \mu) = p(X \geqslant \mu) = 0,5$
- $p(\mu - a \leqslant X \leqslant \mu) = p(\mu \leqslant X \leqslant \mu + a)$
- $p(\mu - a \leqslant X \leqslant \mu + a) = 2 \times p(\mu \leqslant X \leqslant \mu + a)$
- $p(X \geqslant \mu + a) = p(X \leqslant \mu - a)$



15.2.d Intervalles 1 sigma, 2 sigma, 3 sigma

Propriété 15.7 (Valeurs approchées à connaître)

Si une variable aléatoire X suit une loi normale $\mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$, alors :
$p(\mu - \sigma \leqslant \mathrm{X} \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,68$
$p(\mu - 2\sigma \leqslant \mathrm{X} \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,95$
$p(\mu - 3\sigma \leqslant \mathrm{X} \leqslant \mu + 3\sigma) \approx 0,997$

Remarque

Concernant la deuxième égalité, on a plus précisément $p(\mu - 2\sigma \leqslant \mathrm{X} \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$.

Le nombre u tel que $p(\mu - u\,\sigma \leqslant \mathrm{X} \leqslant \mu + u\,\sigma) = 0,95$ est $u = 1,96$, arrondi au centième près, autrement dit : $p(\mu - 1,96\,\sigma \leqslant \mathrm{X} \leqslant \mu + 1,96\,\sigma) \approx 0,95$.

Ce nombre 1,96 n'est pas à retenir, mais il interviendra pour l'échantillonnage et l'intervalle de fluctuation.

15.3 Utilisation de la calculatrice

15.3.a Calculatrice TI 82 Advanced ou TI-83 Premium

Calcul de probabilité du type $a \leqslant X \leqslant b$)

Calculons par exemple $p(4 \leqslant X \leqslant 7)$ pour une loi normale de moyenne $\mu = 5$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

1. Appuyer sur 2nde [distrib]
2. Choisir `2:NormalFRép(`
3. Compléter l'écran ainsi :
   ```
   borninf:4
   bornsup:7
   μ:5
   σ:2
   ```
4. Appuyer deux fois sur entrer
5. On voit alors : `NormalFRép(4,7,5,2)` Appuyer sur entrer

On obtient : $p(4 \leqslant X \leqslant 7) \approx 0{,}532\,8$

Calcul de probabilité du type $p(X \geqslant a)$ ou $p(X \leqslant b)$

Pour une loi normale de moyenne $\mu = 5$ et d'écart-type $\sigma = 2$,

- si on veut calculer $p(X \geqslant 4)$, on calcule $p(4 \leqslant X \leqslant 10^{99})$, et on procède comme ci-dessus ;
- si on veut calculer $p(X \leqslant 7)$, on calcule $p(-10^{99} \leqslant X \leqslant 7)$, et on procède comme ci-dessus.

Sachant que $p(X \leqslant a) = c$, déterminer a à partir de c :

Calculons par exemple a tel que $p(X \leqslant a) = 0,7$ pour une loi normale de moyenne $\mu = 5$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

1. Appuyer sur [2nde] [distrib]
2. Choisir `3:FracNormale(`
3. Compléter l'écran ainsi :

area:0.7
μ:5
σ:2

4. Appuyer deux fois sur [entrer]
5. On voit alors : `FracNormale(0.7,5,2)` Appuyer sur [entrer]

Réponse arrondie à 10^{-4} près : 6,048 8

On obtient : $p(4 \leqslant X \leqslant 7) \approx 0{,}532\,8$

`FracNormale(`c`,`μ`,`σ`)`

15.3.b Calculatrice TI 82

On commence par appuyer sur [2nde] [distrib]

Calculs de probabilité

$p(a \leqslant X \leqslant b)$	`normalFRép(`a`,`b`,`μ`,`σ`)`
$p(X \leqslant b)$	`normalFRép(-10^99,`b`,`μ`,`σ`)`
$p(X \geqslant a)$	`normalFRép(`a`,10^99,`μ`,`σ`)`

Sachant que $p(X \leqslant a) = c$**, déterminer** a **à partir de** c **:** `FracNormale(`c`,`μ`,`σ`)`

15.3.c Calculatrice CASIO

Calculs de probabilité

[MENU] STAT [EXE], puis : [F5] (DIST) [F1] (NORM) [F2] (Ncd) [F2] (Var)

$p(a \leqslant X \leqslant b)$ `Lower :`a `Upper :`b σ`:...` μ`:...` `Save res:None`

$p(X \leqslant b)$ `Lower :-10^99` `Upper :`b σ`:...` μ`:...` `Save res:None`

$p(X \geqslant a)$ `Lower :`a `Upper :10^99` σ`:...` μ`:...` `Save res:None`

Sachant que $p(X \leqslant a) = c$**, déterminer** a **à partir de** c **:**

[MENU] STAT [EXE], puis : [F5] (DIST) [F1] (NORM) [F3] (InvN) [F2] (Var)

`Tail :Left` `Area :`c σ`:...` μ`:...` `Save res:None`

Chapitre 16

Échantillonnage

I Exercices

16.1 Loi binomiale, loi normale et échantillonnage

Exercice 16.1

Une société de démarchage téléphonique sait que, en contactant une personne, la probabilité de réussir à vendre un produit donné est 0,4.

1. Un commercial contacte 30 clients successivement. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de succès.

a) Quelle est la loi de cette variable aléatoire ?

b) Calculer μ l'espérance de cette variable aléatoire, et son écart-type σ arrondi au centième près.

c) Calculer $p(\mu - 1,96\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 1,96\sigma)$

Indications :

- calculer d'abord $\mu - 1,96\sigma$ et $\mu + 1,96\sigma$;
- déterminer les valeurs de X qui sont entre ces deux nombres ;
- calculer la probabilité demandée, en utilisant `binomFRép`, en sachant que : $p(0 \leqslant X \leqslant k) =$ `binomFRép(n,p,k)`.

2. Y est la variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ.
Calculer $p(\mu - 1,96\sigma \leqslant Y \leqslant \mu + 1,96\sigma)$.

3. Généralisation

Un commercial contacte n clients, avec à chaque client une probabilité de succès p, et X est le nombre de succès. L'ensemble des n clients est en fait un échantillon dans l'ensemble de tous les clients.

On admet que : $p(\mu - 1,96\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 1,96\sigma)$ est proche de 0,95

Faisons maintenant le lien avec l'intervalle de fluctuation.

Puisque X est le nombre de succès pour n répétitions, la fréquence de succès est : $f = \dfrac{X}{n}$

Démontrer que :

$$\mu - 1,96\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 1,96\sigma \iff p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant f \leqslant p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$

16.2 Intervalle de fluctuation

Exercice 16.2

Environ 51 % de la population française ayant un emploi fait partie de la catégorie socio-professionnelle « employés et ouvriers ».

Au concours de l'ENA en 2009, 17 admis sur 81 ont des parents appartenant à cette catégorie.

1. Dans un échantillon de 81 personnes choisies au hasard dans la population française ayant un emploi, on peut déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95 % de la fréquence de personnes faisant partie de cette catégorie.
   a) Vérifier les conditions d'applications d'application de l'intervalle de fluctuation.
   b) Calculer cet intervalle.
2. Peut-on considérer qu'en 2009, les admis dont les parents font partie de la catégorie « employés et ouvriers », sont sous représentés à l'ENA ?

Exercice 16.3

Une ville offre pour Noël un panier cadeaux aux seniors (personnes de plus de 60 ans). Dans cette ville, 17 % des habitants ont plus de 60 ans.

On distribue ce panier dans un quartier de 550 habitants.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95 % de la fréquence de seniors dans ce quartier.
2. Combien de paniers faut-il prévoir ?

Exercice 16.4

La documentation technique d'une machine à fabriquer des pilules indique que la proportion de pilules défectueuses fabriquées par cette machine est de 1 pour 1 000.

Sur un échantillon de 10 000 pilules, 15 pilules sont défectueuses.

La proportion annoncée semble-t-elle respectée ? On pourra utiliser un intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.

16.3 Intervalle de confiance

Exercice 16.5

1. Un sondage effectué auprès de 1 000 personnes annonce qu'un candidat à une élection a 51,2 % d'intentions de vote.
   a) Calculer l'intervalle de confiance au seuil de 95 % de la proportion de voix favorables à ce candidats.
   b) Peut-on affirmer, avec un niveau de confiance de 95 % que ce candidat sera élu ?
2. Mêmes questions **a)** et **b)** pour une autre élection, où un sondage effectué auprès de 1 000 personnes annonce qu'un autre candidat à une élection a 58,6 % d'intentions de vote.
3. **Précision des sondages**
   a) Quand un sondage est effectué auprès de 1 000 personnes, quelle est la précision en pourcentage de ce sondage, autrement dit le résultat est valable à plus ou moins quel pourcentage ?
   b) Que pensez-vous de la précision en pourcentage à 0,1 % près des deux sondages précédents ?

c) Un sondage « sortie des urnes » est effectué le jour de l'élection auprès de 100 000 votants entre 18 h et 20 h pour donner le résultat dans les médias à 20 h. Quelle est alors la précision d'un tel sondage ?

Exercice 16.6

Dans la production d'une usine automobiles, 120 voitures sont vérifiées et 94 n'ont pas de défaut.

1. Dans quel intervalle est la proportion p de voitures sans défaut dans la production de cette usine ?
2. Est-on certain que la proportion p appartienne à cet intervalle ? Justifier.

Exercice 16.7

Un nouveau traitement est testé dans un hôpital sur 200 patients et échoue 37 fois.

1. Donner un intervalle permettant d'estimer le pourcentage de réussite de ce traitement.
2. Sur quel effectif de patients faudrait-il tester ce traitement pour estimer le pourcentage de réussite à 1 % près ?

16.4 Exercices de bac

Exercice 16.8 (Baccalauréat S, Liban, mai 2015, ex. 4)

En prévision d'une élection entre deux candidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs.

Parmi les 1 200 personnes qui ont répondu au sondage, 47 % affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B.

Compte-tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B, tandis que 20 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A.

On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note :

- A l'évènement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A » ;
- B l'évènement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B » ;
- V l'évènement « La personne interrogée dit la vérité ».

1. Construire un arbre de probabilités traduisant la situation.

2. **a)** Calculer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.

b) Sachant que la personne interrogée dit la vérité, calculer la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A.

3. Démontrer que la probabilité que la personne choisie vote effectivement pour le candidat A est $0,529$.

4. L'institut de sondage publie alors les résultats suivants :

52,9 % des électeurs* voteraient pour le candidat A. *estimation après redressement, fondée sur un sondage d'un échantillon représentatif de 1 200 personnes.

Au seuil de confiance de 95 %, le candidat A peut- il croire en sa victoire ?

5. Pour effectuer ce sondage, l'institut a réalisé une enquête téléphonique à raison de 10 communications par demi-heure. La probabilité qu'une personne contactée accepte de répondre à cette enquête est $0,4$.

L'institut de sondage souhaite obtenir un échantillon de 1 200 réponses.

Quel temps moyen, exprimé en heures, l'institut doit-il prévoir pour parvenir à cet objectif ?

Exercice 16.9 (Baccalauréat S, Métropole-Réunion, juin 2015, ex. 1)

Les résultats des probabilités seront arrondis à 10^{-3} près.

Partie 1

1. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif donné.
   On rappelle que la densité de probabilité de cette loi est la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par
   $$f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$
   a) Soit c et d deux réels tels que $0 \leqslant c < d$.
   Démontrer que la probabilité $P(c \leqslant X \leqslant d)$ vérifie $P(c \leqslant X \leqslant d) = \mathrm{e}^{-\lambda c} - \mathrm{e}^{-\lambda d}$.
   b) Déterminer une valeur de λ à 10^{-3} près de telle sorte que la probabilité $P(X > 20)$ soit égale à 0,05.
   c) Donner l'espérance de la variable aléatoire X
   Dans la suite de l'exercice on prend $\boldsymbol{\lambda = 0,15}$.
   d) Calculer $P(10 \leqslant X \leqslant 20)$.
   e) Calculer la probabilité de l'évènement $(X > 18)$.
2. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 16 et d'écart type $1,95$.
   a) Calculer la probabilité de l'évènement $(20 \leqslant Y \leqslant 21)$.
   b) Calculer la probabilité de l'évènement $(Y < 11) \cup (Y > 21)$.

Partie 2

Une chaîne de magasins souhaite fidéliser ses clients en offrant des bons d'achat à ses clients privilégiés. Chacun d'eux reçoit un bon d'achat de couleur verte ou rouge sur lequel est inscrit un montant.

Les bons d'achats sont distribués de façon à avoir, dans chaque magasin, un quart de bons rouges et trois quarts de bons verts.

Les bons d'achat verts prennent la valeur de 30 euros avec une probabilité égale à $0,067$ ou des valeurs comprises entre 0 et 15 euros avec des probabilités non précisées ici.

De façon analogue, les bons d'achat rouges prennent les valeurs 30 ou 100 euros avec des probabilités respectivement égales à $0,015$ et $0,010$ ou des valeurs comprises entre 10 et 20 euros avec des probabilités non précisées ici.

1. Calculer la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros sachant qu'il est rouge.
2. Montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros vaut $0,057$.
   Pour la question suivante, on utilise cette valeur.
3. Dans un des magasins de cette chaîne, sur 200 clients privilégiés, 6 ont reçu un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 €.
   Le directeur du magasin considéré estime que ce nombre est insuffisant et doute de la répartition au hasard des bons d'achats dans les différents magasins de la chaîne.
   Ses doutes sont-ils justifiés ?

16.5 Pour réviser

Chapitre du livre n^o 16 – Intervalle de fluctuation. Estimation.

Les exercices résolus

- ex 1 p 423 : intervalle de fluctuation
- ex 3 p 425 : intervalle de confiance

Rubrique *Pour s'exercer*, corrigés page 469

- ex 2 p 423 : intervalle de fluctuation
- ex 6 p 425 : intervalle de confiance

Rubrique *Objectif bac*, corrigés page 479

- ex 24 p 429 : QCM
- ex 25 p 429 : Vrai/Faux
- ex 26 p 430 : exercice de type bac, loi binomiale, loi normale, intervalle de confiance
- ex 27 p 431 : exercice d'approfondissement sur l'intervalle de fluctuation

II Cours

16.1 Rappels sur l'échantillonnage

On s'intéresse à un caractère dans une population. La proportion de ce caractère dans cette population est noté p. Un échantillon est constitué d'individus de cette population, en général choisis au hasard. Son effectif est noté n et il est en général beaucoup plus réduit que l'effectif de la population. La fréquence du caractère dans l'échantillon est notée f.

16.2 Intervalle de fluctuation

Le programme de mathématiques de terminale S indique qu'un élève doit connaître l'intervalle de fluctuaton asymptotique au seuil de 95 % (voir propriété ci-dessous).

Situation : la proportion p du caractère dans la population est donnée.

Plus précisément la propriété énoncée ci-dessous sera utilisée lorsque la proportion p du caractère dans la population est donnée, soit parce qu'elle est connue de manière certaine, soit parce que cette proportion p est annoncée, et qu'on se demande si la valeur de p est plausible ou non. L'effectif n de l'échantillon et la fréquence f du caractère dans l'échantillon sont connus (il faut parfois calculer f). On calcule alors l'intervalle de fluctuation pour tirer des conclusions, soit sur l'échantillon, soit sur la valeur de p.

À l'aide de la loi binomiale et de la loi normale, on démontre la propriété ci-dessous.

Propriété 16.1

p est la proportion d'un caractère étudié dans une population, n est l'effectif d'un échantillon de cette population, et f est la fréquence du caractère dans cet échantillon.
Si $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$, $n(1-p) \geqslant 5$,
alors, il y a une probabilité proche de 0,95 que la fréquence f appartienne à l'intervalle

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \; ; \; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right].$$

Cet intervalle est appelé **intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %**.

16.3 Estimation – Intervalle de confiance

Le programme de mathématiques de terminale S indique qu'un élève doit savoir

- *estimer une proportion inconnue à partir d'un échantillon ;*
- *déterminer une taille d'échantillon suffisante pour obtenir, avec une précision donnée, une estimation d'une proportion au niveau de confiance 0,95.*

Situation : la proportion p du caractère dans la population n'est pas donnée.

La propriété énoncée ci-dessous sera utilisée lorsque la proportion p du caractère dans la population est inconnue. La fréquence f du caractère dans l'échantillon est donnée ou il faut la calculer. On calcule alors l'intervalle de confiance et cela sert à **estimer** la valeur de p.

Propriété 16.2

p est la proportion d'un caractère étudié dans une population, n est l'effectif d'un échantillon de cette population, et f est la fréquence du caractère dans cet échantillon.
Si $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$, $n(1-p) \geqslant 5$,
alors, il y a une probabilité supérieure ou égale à 0,95 que la proportion p appartienne à l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.
Cet intervalle est appelé **intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95**.

Chapitre 18

Annexes

A Équations et inéquations

1. **Exemples d'équations et inéquations que l'on peut résoudre de manière exacte**
   Au collège et au lycée, on apprend à résoudre de manière exacte différents types d'équations ou d'inéquations comme
   - $5x + 7 = 9$
   - $x^2 - 5x + 4 = 0$
   - $(x - 7)(x + 1) = 0$
   - $3x - 5 < x + 4$
   - $x^2 - 5x + 4 \geqslant 7x + 6$
   - $\mathrm{e}^{6x+4} = 9$
   - $\ln(x) > 2$
   - $1,04^n > 100$
2. **Équations et inéquations que l'on peut résoudre de manière approchée**
   Certaines équations ne peuvent pas être résolue de manière exacte comme $x^7 + x = 1\,000$, mais on peut en calculer une solution approximative.

On ne peut pas définir les équations qu'on sait résoudre de manière exacte ou pas, mais ce qui va suivre rappelle les propriétés et méthodes à connaître.

A.1 Résolution exacte d'une équation ou d'une inéquation

A.1.a Équation ou inéquation du premier degré à une inconnue

La résolution des équations et inéquations du premier degré à une inconnue repose sur les propriétés page suivante.

Propriété 18.1 (Règles sur les égalités et inégalités)

Pour des nombres a, b, c

- si $a = b$, alors $a + c = b + c$;
- si $a < b$, alors $a + c < b + c$;
- si $a = b$, alors $a \times c = b \times c$;
- si $a < b$ et $c > 0$, alors $a \times c < b \times c$;
- si $a < b$ et $c < 0$, alors $a \times c > b \times c$;

autrement dit,

- une égalité reste vraie si
  - on ajoute le même nombre aux deux membres de cette égalité
  - on multiplie par le même nombre les deux membres de cette égalité
- on ne change pas le sens d'une inégalité si
  - on ajoute le même nombre aux deux membres de cette inégalité
  - on multiplie par le même nombre positif les deux membres de cette égalité
- on change le sens d'une inégalité si on multiplie par le même nombre négatif les deux membres de cette égalité.

Exemple 18.1 (Résolution d'une inéquation du premier degré à une inconnue)

$$\begin{array}{llll} & 2x - 7 & \geqslant 5x + 9 & \\ \iff & 2x & \geqslant 5x + 9 + 7 & \text{on a ajouté 7 aux deux membres de cette inégalité} \\ \iff & -3x & \geqslant 16 & \text{on a ajouté } -5x \text{ aux deux membres de cette inégalité} \\ \iff & x & \leqslant -\dfrac{16}{3} & \text{on a multiplié par } -\dfrac{1}{3} \text{ les deux membres de cette inégalité} \end{array}$$

A.1.b Équation produit

La résolution d'une équation produit repose sur la propriété ci-dessous.

Propriété 18.2 (Produit nul)

Pour deux nombres A et B, $A \times B = 0 \iff A = 0$ ou $B = 0$.
Autrement dit un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

Étudions maintenant un exemple.

Exemple 18.2 (Équation produit)

$$\begin{aligned} (x-1)(x+4)(3x-8) = 0 &\iff x - 1 = 0 \text{ ou } x + 4 = 0 \text{ ou } 3x - 8 = 0 \\ &\iff \boxed{x = 1 \text{ ou } x = -4 \text{ ou } x = \frac{8}{3}} \end{aligned}$$

A.1.c Équation ou inéquation du second degré à une inconnue

Une équation ou inéquation du second degré à une inconnue fait tout de suite penser au discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, mais dans certains cas simples, on peut simplement utiliser une factorisation, puis résoudre une équation-produit, comme on peut le voir dans les deux exemples ci-dessous.

Exemple 18.3

$$5x^2 - 3x = 0 \iff x(5x - 3) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } 5x - 3 = 0 \iff \boxed{x = 0 \text{ ou } x = \frac{3}{5}}$$

Exemple 18.4

$$x^2-7=0 \iff x^2-\sqrt{7}^2=0 \iff (x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})=0 \iff x-\sqrt{7}=0 \text{ ou } x+\sqrt{7}=0$$
$$\iff \boxed{x=\sqrt{7} \text{ ou } x=-\sqrt{7}}$$

Propriété 18.3 (Équation $ax^2+bx+c=0$)

$ax^2+bx+c=0 \qquad \Delta=b^2-4ac$
- Si $\Delta<0$ l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution.
- Si $\Delta=0$ l'équation $ax^2+bx+c=0$ a une seule solution qui est $x_0=-\dfrac{b}{2a}$
- Si $\Delta>0$ l'équation $ax^2+bx+c=0$ a deux solutions qui sont $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

A.1.d Exponentielle et logarithme

Les équations $\ln(x)=a$ et $\mathrm{e}^x=a$ sont traitées au chapitre 9 (Logarithmes), au paragraphe 9.1.d page 158.

Les équations du type $a^n=b$ et les inéquations du type $a^n<b$ sont aussi traitées au chapitre 9 (Logarithmes), au paragraphe 9.2.c page 159.

A.2 Résolution approchée d'une équation

Voir documents
- *Méthode de résolution approchée d'une équation*
- *Utilisation du solveur de la TI 82 Advanced*

B Signe d'une expression

Remarque importante :
- Pour étudier plus facilement le signe d'une expression penser à **factoriser** cette expression si c'est possible.
- Si cette expression contient des écritures fractionnaires, penser à **réduire au même dénominateur**.

Méthode 18.1 (Signe d'une expression $ax+b$ ($a\neq 0$))

- résoudre l'équation $ax+b=0$, on appelle x_0 sa solution ;
- le signe de $ax+b$ est alors donné par le tableau ci-dessous.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de $ax+b$		Signe de $-a$	0	Signe de a	

Méthode 18.2 (Signe d'une expression ax^2+bx+c)

La résolution d'une équation $ax^2+bx+c=0$ est rappelée par la propriété 18.3 page 280.

- Si $\Delta<0$

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de ax^2+bx+c		Signe de a	

- Si $\Delta = 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de ax^2+bx+c		Signe de a	0	Signe de a	

- Si $\Delta > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de ax^2+bx+c		Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a	

Propriété 18.4 (Signe de la puissance d'une expression)

Pour une expression $f(x)$
- si n est un entier pair, le signe de $\big(f(x)\big)^n$ est positif ;
- si n est un entier impair, le signe de $\big(f(x)\big)^n$ est le signe de $f(x)$.

Exemple 18.5 (Étude du signe d'une expression)

Étude du signe de l'expression $\dfrac{(x+2)(x-4)^3}{(x-1)^2}$ selon les valeurs de x.

Pour tout réel x, l'expression $(x-1)^2$ est positive. D'autre part, comme 3 est impair, l'expression $(x-4)^3$ est du signe de $(x-4)$.

Donc le signe de l'expression $\dfrac{(x+2)(x-4)^3}{(x-1)^2}$ selon les valeurs de x est du signe de l'expression $(x+2)(x-4)$.

On obtient donc le tableau de signes ci-dessous.

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
Signe de $x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
Signe de $x-4$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $\dfrac{(x+2)(x-4)^3}{(x-1)^2}$		$+$	|	$-$	||	$-$	|	$+$	

C Récapitulation sur les fonctions

C.1 Définition d'une fonction

- **Sous la forme $f(x) = \cdots$**
  Une fonction est souvent définie par une phrase comme :
  « la fonction f est définie par $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$ ».
- **Sous la forme $x \longmapsto \cdots$**
  On voit parfois aussi une expression comme « la fonction $x \longmapsto 3x^2 - 5x + 4$ », qui se lit « la fonction qui à x associe $3x^2 - 5x + 4$ ».

C.2 Étude d'une fonction

Voici le plan d'étude d'une fonction. On retrouve souvent ces questions dans les exercices sur les fonctions. Les points **1.** à **5.** sont détaillés plus bas.

Plan d'étude d'une fonction

1. Parité, périodicité
2. Limites
3. Sens de variation
   - Calculer la dérivée
   - Étudier le signe de la dérivée
4. Calculer certaines valeurs remarquables
5. Dresser le tableau de variation

C.2.a Parité, périodicité

Les fonctions paires, impaires, périodiques sont abordées dans le chapitre 7 (Fonctions trigonométriques) au paragraphe 7.6 page 133.

C.2.b Limites

Voir chapitre 3 (Limite et continuité d'une fonction).

C.2.c Calculer la dérivée

Tab. 18.1
Dérivées des fonctions usuelles

$f(x) = \cdots$	$f'(x) = \cdots$	f dérivable sur $\cdots$
k constante	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 0$, $\mathbb{R}^*$ si $n \leqslant -1$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\ ;\ +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$]0\ ;\ +\infty[$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$

Tab. 18.2
Dérivée d'une somme, d'un produit et d'un quotient

Dérivée	Condition
$(u+v)' = u' + v'$	
$(ku)' = k \times u'$	
$(uv)' = u'v + v'u$	
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$	v ne s'annule pas sur I

Tab. 18.3

Dérivées des fonctions composées

Dérivée	Condition
$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$	u ne s'annule pas sur I
$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	u ne s'annule pas sur I
$(u^n)' = nu'u^{n-1}$	
$(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$	
$\big(\ln(u)\big)' = \dfrac{u'}{u}$	$u > 0$ sur I
$\big(\cos(u)\big)' = -u'\sin(u)$	
$\big(\sin(u)\big)' = u'\cos(u)$	

C.2.d Étudier le signe de la dérivée

Les différentes méthodes et propriétés pour étudier le signe d'une expression $E(x)$ selon les valeurs de x sont rappelées dans l'annexe B page 280.

C.2.e Utilisation de la calculatrice

Méthode 18.3 (Afficher un tableau de valeurs à la calculatrice)

- Dans l'éditeur de fonctions (touche f(x)), saisir la fonction f.
- Appuyer sur 2nde [déf table]
- Dans la fenêtre, sur la ligne `Indpnt`, aller sur `Auto` et appuyer sur entrer
- Appuyer sur 2nde [table]

Exemple 18.6 (Calculer l'image de nombres à la demande à la calculatrice)

La fonction f est définie par $f(x) = -4x^2 + 9x + 37$ et on veut calculer $f(-5)$, $f(4)$ et $f(12)$.

- Dans l'éditeur de fonctions (touche f(x)), saisir la fonction f.
- Appuyer sur 2nde [déf table]
- Dans la fenêtre, sur la ligne `Indpnt`, aller sur `Dem` et appuyer sur entrer
- Appuyer sur 2nde [table]
- Dans la colonne `X`,
  - saisir `-5`, puis appuyer sur entrer, et dans la colonne `Y`, on voit `-108`
  - saisir `4`, puis appuyer sur entrer, et dans la colonne `Y`, on voit `9`
  - saisir `12`, puis appuyer sur entrer, et dans la colonne `Y`, on voit `-431`

On a donc : $f(-5) = -108 \qquad f(4) = 9 \qquad f(12) = -431$.

Exemple 18.7 (Courbe d'une fonction à la calculatrice)

La fonction f est définie par $f(x) = x^2 - 6x + 4$ sur l'intervalle $[-2 ;\ 10]$.

- Dans l'éditeur de fonctions (touche f(x)), saisir la fonction f.
- Dans fenêtre, saisir les valeurs de l'intervalle : Xmin=-2 et Xmax=10.
- Dans Zoom, choisir ZMinMax ou AjustZoom ou ZoomFit
- Appuyer sur entrer

Exemple 18.8 (Maximum d'une fonction à la calculatrice)

On veut connaître le maximum de la fonction f définie par :

$f(x) = -2x^3 + 8x^2 + 22x - 28$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 6]$.

- Afficher la courbe de la fonction f à la calculatrice.
  Réglage de la fenêtre :
  `Xmin=0` `Xmax=6` `Xgrad=1`
  `Ymin=-40` `Ymax=80` `Ygrad=10`
- Appuyer sur $\boxed{\text{2nde}}$ [calculs]
- Descendre sur `maximum`, et appuyer sur $\boxed{\text{entrer}}$.
- On voit `Borne Inf` : placer le curseur un peu à gauche du sommet et appuyer sur $\boxed{\text{entrer}}$.
- On voit `Borne Sup` : placer le curseur un peu à droite du sommet et appuyer sur $\boxed{\text{entrer}}$.
- On voit `Valeur Init` : appuyer sur $\boxed{\text{entrer}}$.
- On voit :
  `Maximum`
  `X=3.66667` `Y=61.62963`

Donc le maximum de la fonction f est environ 61,63 et il est atteint pour $x \approx 3,67$

C.2.f Positions relative de deux courbes

Définition 18.1

Pour deux fonctions f et g définies sur un intervalle I,

- Dire que la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle I signifie que pour tout réel x de l'intervalle I, $f(x) > g(x)$.
- Dire que la courbe $\mathscr{C}_f$ est en dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle I signifie que pour tout réel x de l'intervalle I, $f(x) < g(x)$.

Méthode 18.4

Pour connaître les positions relatives de deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur un intervalle I, on étudie le signe de $f(x) - g(x)$ selon les valeurs de x.

- Si pour tout réel x de l'intervalle I on a $f(x) - g(x) > 0$, alors la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle I.
- Si pour tout réel x de l'intervalle I on a $f(x) - g(x) < 0$, alors la courbe $\mathscr{C}_f$ est en dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle I.

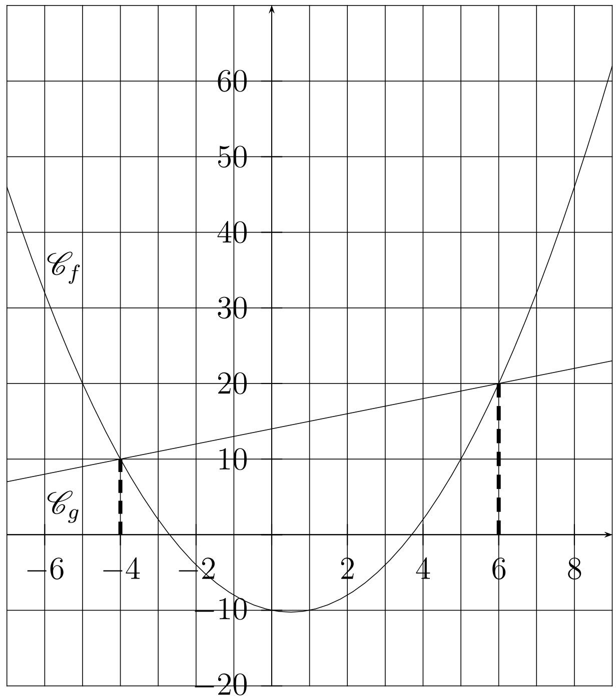
Exemple 18.9

La fonction f est définie par $f(x) = x^2 - x - 10$ et la fonction g est définie par $g(x) = x + 14$.

Ces deux fonctions sont représentées graphiquement par les courbes respectives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ (la courbe $\mathscr{C}_g$ est une droite).

On veut justifier les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Étudions donc le signe de $f(x) - g(x)$ selon les valeurs de x.



$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= x^2 - x - 10 - (x + 14) \\ &= x^2 - x - 10 - x - 14 \\ &= x^2 - 2x - 24 \end{aligned}$$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-24) = 100$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{100} = 10$

$$x_1 = \frac{-(-2) - 10}{2 \times 1} = \frac{-8}{2} = -4$$

$$x_2 = \frac{-(-2) + 10}{2 \times 1} = \frac{12}{2} = 6$$

x	$-\infty$ -4	-4 6	6 $+\infty$
Signe de $f(x) - g(x)$	$+$ 0	$-$ 0	$+$
Positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$	$\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$	$\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$	$\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$

C.3 Fonctions ayant des paramètres

Exemple 18.10

La fonction f est définie par $f(x) = ax^2 + bx + 4$, et elle est représentée ci-dessous par la courbe $\mathscr{C}_f$.

On dit que a et b sont des **paramètres**. Déterminer a et b, sachant que $f(2) = 0$ et $f'(0) = -3$.

Puisque $f(x) = ax^2 + bx + 4$ et $f(2) = 0$, on a :

$$\begin{aligned} f(2) = 0 &\iff a \times 2^2 + b \times 2 + 4 = 0 \\ &\iff 4a + 2b + 4 = 0 \end{aligned}$$

On sait aussi que $f'(0) = -3$, mais calculons d'abord $f'(x)$.

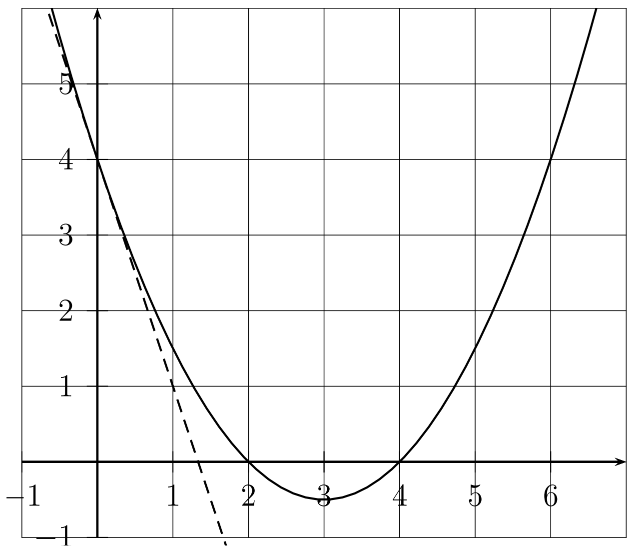
$f'(x) = a \times 2x + b \times 1 + 0 = 2ax + b$

Donc :

$$\begin{aligned} f'(0) = -3 &\iff 2a \times 0 + b = -3 \\ &\iff b = -3 \end{aligned}$$

or, $4a + 2b + 4 = 0$, on a donc :

$$\begin{aligned} 4a + 2 \times (-3) + 4 = 0 &\iff 4a - 2 = 0 \\ &\iff 4a = 2 \\ &\iff a = \frac{2}{4} = 0,5 \end{aligned}$$



On obtient finalement : $\boxed{f(x) = 0,5x^2 - 3x + 4}$.

Exemples d'exercices de baccalauréat comportant une fonction avec paramètres.

- Baccalauréat S, Antilles-Guyane, juin 2019, exercice 1 : $f(x) = \dfrac{a}{1 + \mathrm{e}^{-bx}}$
- Baccalauréat S, Pondichéry, mai 2018, exercice 1 : $f(t) = a\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + b$
- Baccalauréat S, Amérique du Nord, juin 2018, exercice 2 : $f(x) = bx + 2\ln(1 - x)$
- Baccalauréat S, Asie, juin 2018, exercice 1 : $f_p(x) = \dfrac{100p}{1 - (1 - p)\mathrm{e}^{-pt}}$

C.4 Famille de fonctions

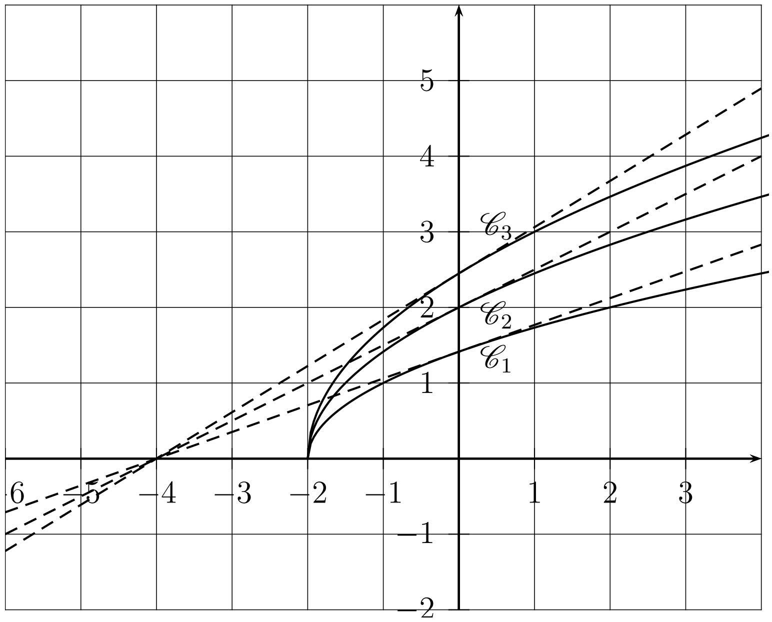
Exemple 18.11

Soit n un entier naturel, on considère les fonctions f_n définies sur $[-2 ; +\infty[$ par : $f_n(x) = \sqrt{n(x + 2)}$.

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ sont tracées ci-contre.

On dit que l'ensemble des fonctions f_n constituent une **famille de fonctions**.



Énoncé

1. Point commun aux courbes $\mathscr{C}_n$
   a) Il semble que les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ aient un point commun A. Donner ses coordonnées.
   b) Démontrer que pour tout entier naturel n, la courbe $\mathscr{C}_n$ passe par A.
2. Point commun aux tangentes au point d'abscisse zéro.
   Les tangentes aux courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ au point d'abscisse zéro sont tracées en pointillés.
   a) Il semble que ces trois tangentes aient un point commun B. Donner ses coordonnées.
   b) Démontrer que pour tout entier naturel n, la tangente à la courbe $\mathscr{C}_n$ au point d'abscisse zéro passe par B.

Corrigé

1. Point commun aux courbes $\mathscr{C}_n$
   a) Il semble que le point commun aux courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ soit $\boxed{\text{le point } A(-2 ;\ 0)}$.
   b) Démontrer que pour tout entier naturel n, la courbe $\mathscr{C}_n$ passe par A.
   Pour tout entier naturel n, on a : $f_n(-2) = \sqrt{n \times (-2 + 2)} = \sqrt{0} = 0$, donc, pour tout entier naturel n, la courbe $\mathscr{C}_n$ passe par $A(-2 ;\ 0)$.
2. Point commun aux tangentes au point d'abscisse zéro.
   a) Il semble que le point commun aux tangentes au point d'abscisse zéro soit $\boxed{\text{le point } B(-4 ;\ 0)}$.

b) Démontrer que pour tout entier naturel n, la tangente à la courbe $\mathscr{C}_n$ au point d'abscisse zéro passe par B.

L'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_n$ au point d'abscisse zéro est :
$y = f_n'(0) \times (x - 0) + f_n(0)$.
Calculons maintenant $f_n(0)$ et $f_n'(0)$.
$f_n(0) = \sqrt{n \times (0+2)} = \sqrt{2n}$.
Pour calculer $f_n'(0)$, calculons d'abord $f_n'(x)$:
$u(x) = n(x+2) = nx + 2n \quad u'(x) = n \quad \text{or} \quad (\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
Donc $f_n'(x) = \dfrac{n}{2\sqrt{n(x+2)}}$ donc $f_n'(0) = \dfrac{n}{2\sqrt{2n}}$
Ainsi l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_n$ au point d'abscisse zéro est :
$y = \dfrac{n}{2\sqrt{2n}}x + \sqrt{2n}$.
Pour vérifier si le point $B(-4\ ;\ 0)$ appartient bien à cette tangente, remplaçons x par -4 dans l'équation ci-dessus.
$y = \dfrac{n}{2\sqrt{2n}} \times (-4) + \sqrt{2n} = \dfrac{-4n}{2\sqrt{2n}} + \sqrt{2n} = \dfrac{-2n}{\sqrt{2n}} + \sqrt{2n}$
Or, $2n = \sqrt{2n} \times \sqrt{2n}$
Donc, $y = \dfrac{-\sqrt{2n} \times \sqrt{2n}}{\sqrt{2n}} + \sqrt{2n} = -\sqrt{2n} + \sqrt{2n} = 0$
Donc, le point commun à toutes les tangentes aux courbes $\mathscr{C}_n$ au point d'abscisse zéro est bien le point $B(-4\ ;\ 0)$.

Exemples d'exercices de baccalauréat comportant une famille de fonctions

- Baccalauréat S, Liban, mai 2018, exercice 4 : $f_n(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^n}$
- Baccalauréat S, Liban, juin 2017, exercice 3 : $f_k(x) = x + k\mathrm{e}^{-x}$
- Baccalauréat S, Liban, mai 2016, exercice 3 $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + n\mathrm{e}^{1-x}}$

D Polynômes

Soit n un entier naturel, un polynôme de degré n est une expression de la forme $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$, par exemple :
- $P(x) = 3x - 7$ (une expression affine est un polynôme de degré 1) ;
- $P(x) = 3x^2 - 2,6x + 7,2$ (polynôme de degré 2) ;
- $P(x) = x^6 - 4x^3 + 3x^2 - 0,9x - 11,3$ (polynôme de degré 6).

Les polynômes ne sont plus au programme de terminale S, pourtant ils apparaissent dans des sujets, soit en tant que fonction, soit avec des complexes.

La propriété ci-dessous n'est plus au programme de terminale S, mais elle donne l'explication de certaines questions posées dans des exercices.

Propriété 18.5 (Factorisation d'un polynôme)

Pour un polynôme P, si a est solution de $P(x) = 0$, c'est à dire si $P(a) = 0$,
alors, il existe $Q(x)$ tel que : $P(x) = (x - a)Q(x)$.

La propriété page suivante, qui peut paraître évidente, est utile aussi comme on va le voir plus loin.

Propriété 18.6 (Polynômes égaux – Identification)

Soient deux polynômes $P(x) = a_m x^m + \cdots + a_0$, et $Q(x) = b_n x^n + \cdots + b_0$.

Si, pour tout réel x, $P(x) = Q(x)$, alors
- $m = n$ (ils sont de même degré) ;
- $a_n = b_n$, …, $a_0 = b_0$ (les coefficients des termes de même degré sont égaux)

Exemple 18.12 (Factorisation d'un polynôme de degré 3)

Énoncé

On considère le polynôme $P(x) = 3x^3 + 6x^2 - 93x + 84$.

Le but des questions qui suivent est de factoriser $P(x)$

1. Calculer $P(1)$.

2. On admet qu'il existe des nombres réels a, b, c tels que $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.
Déterminer les nombres a, b, c.

3. Factoriser $P(x)$.

Correction

1. $P(1) = 3 \times 1^3 + 6 \times 1^2 - 93 \times 1 + 84 = \boxed{0}$.

2. $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$. Déterminons les nombres a, b, c.
Développons le polynôme P :

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)(ax^2+bx+c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c \end{aligned}$$

Nous avons donc : $P(x) = 3x^3 + 6x^2 - 93x + 84 = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$.
Par conséquent, par identification, nous obtenons les égalités :
$a = 3 \;\; (1) \qquad b - a = 6 \;\; (2) \qquad c - b = -93 \;\; (3) \qquad -c = 84 \;\; (4)$
D'après les égalités (1) et (2), on a : $b - 3 = 6$, donc $b = 6 + 3 = 9$.
D'après l'égalité (4), $c = -84$.
Ainsi : $\boxed{P(x) = (x-1)(3x^2 + 9x - 84)}$.

3. Factorisation de $P(x)$.
On sait que $P(x) = (x-1)(3x^2 + 9x - 84)$.
Factorisons l'expression $3x^2 + 9x - 84$ qui est un trinôme du second degré.
$\Delta = 9^2 - 4 \times 3 \times (-84) = 1\,089 \qquad \sqrt{\Delta} = \sqrt{1\,089} = 33$

$$x_1 = \frac{-9-33}{2 \times 3} = \frac{-42}{6} = -7 \qquad x_2 = \frac{-9+33}{2 \times 3} = \frac{24}{6} = 4$$

On a donc : $3x^2 + 9x - 84 = 3(x - x_1)(x - x_2) = 3\big(x - (-7)\big)\big(x - 4\big) = 3(x+7)(x-4)$
On obtient finalement : $P(x) = (x-1) \times 3(x+7)(x-4) = \boxed{3(x-1)(x+7)(x-4)}$.

Remarques
- À la question **1.**, on constate que $P(1) = 0$, et à la question **2.** on admet que $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.
  Cela s'explique par la propriété 18.5 page 287.
- Dans la correction de la question **2.**, on obtient :
  $P(x) = 3x^3 + 6x^2 - 93x + 84 = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$ et on en déduit par identification que : $a = 3 \;\; (1) \qquad b - a = 6 \;\; (2) \qquad c - b = -93 \;\; (3) \qquad -c = 84 \;\; (4)$.
  Cela est justifié par la propriété 18.6.page 288.

E Récapitulation pour les lois à densité

	Loi quelconque	Loi uniforme	Loi exponentielle	Loi normale
Intervalle	I	$[a\ ;\ b]$	$[0\ ;\ +\infty[$	$]-\infty\ ;\ +\infty[$
Fonction de densité	f	$f(x) = \dfrac{1}{b-a}$	$f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$	$f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
$p(c \leqslant X \leqslant d)$	$\displaystyle\int_c^d f(t)\,dt$	$\dfrac{d-c}{b-a}$	$\mathrm{e}^{-\lambda c} - \mathrm{e}^{-\lambda d}$	`NormalFRép(c,d,`μ`,`σ`)`
E(X)	$\displaystyle\int_a^b t f(t)\,dt$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	μ

F Sujets de bac S math depuis 2013

Dans les pages qui suivent, des tableaux indiquent les thèmes abordés dans les sujets de l'enseignement obligatoire de mathématiques du baccalauréat S depuis 2013.

On trouve les sujets sur le site de l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public) : `https://www.apmep.fr/-Terminale-S-263-sujets-depuis-1999-`

Abréviations

M. Réunion veut dire *Métropole Réunion*

le thème *fonction* contient : fonction, variations, dérivées, continuité, etc.

VF signifie Vrai Faux

F.1 Tableau – bac S 2013

	Exercice 1	**Exercice 2**	**Exercice 3**	**Exercice 4**
Pondichéry avril 2013	fonction exp, intégrale	QCM, géom espace	complexes	proba, suites, algo, loi binom, loi norm
Am. Nord mai 2013	géom espace	suites, algo	proba, loi norm et exp	fonction ln, intégrale
Liban mai 2013	QCM géom espace	proba condi loi normale	fct exp et ln, intégrale	suites, algo
Polynésie juin 2013	fonction exp, algo, intégrale	QCM complexes, géom espace	proba condi, échant, loi normale	suites
Antilles-Guyane juin 2013	QCM géom espace	proba condi, échant, loi normale	fonction exp, intégrale	complexes, suites, algo
Asie juin 2013	proba condi, loi binom., échant.	fonction exp	VF géom espace	suites
C. étrangers 12 juin 2013	proba condi, lois exp et norm, échant.	VF géom espace	fonction exp, intégrale	suites, algo
M. Réunion juin 2013	proba condi loi binomiale	fonction ln algo, intégrale	VF complexes géom espace	suites

F.2 Tableau – bac S 2014

	Exercice 1	**Exercice 2**	**Exercice 3**	**Exercice 4**
Pondichéry avril 2014	proba, loi exp, échant	VF fonction espace	complexes, suites, algo	fonction exp, intégrale
Liban mai 2014	proba condi, loi normale	VF géom espace	fonction exp, intégrale	complexes, suites, algo
Am Nord mai 2014	loi norm, binom, échant	fonction exp, intégrale	géom espace	suites, algo
C. étrangers juin 2014	QCM proba condi, loi exp et norm	complexes, suites	fonction 3e deg et ln, intégrale	géom espace
Polynésie juin 2014	géom espace	suites, algo	VF proba condi, loi exp, échant	fonction exp
Antilles juin 2014	proba condi, échant	fonction exp, intégrale	géom espace	suites, algo
Asie juin 2014	QCM géom espace	loi norm, proba condi, échant	fonction exp, intégrale	fam fonctions, intégrale, algo
M. Réunion juin 2014	fam fonctions exp intégrale suite	proba condi, loi norm, échant	complexes	géom espace

F.3 Tableau – bac S 2015

	Exercice 1	**Exercice 2**	**Exercice 3**	**Exercice 4**	**Exercice 5**
Pondichéry avril 2015	fonction exp intégrale	suites	loi norm, loi binom, VA	géom espace	
Liban mai 2015	géom espace	suites	fonction exp	probabilité conditionnelle, échantillonnage, loi binomiale	
Am. Nord juin 2015	géom espace	suites	loi norm, proba	fonction ln intégrale	
C. étrangers juin 2015	échant. loi norm. proba	VF complexes géom espace	suites fonction exp	fonction ln aire, intégrale	
Polynésie juin 2015	géom espace	complexes	loi norm, proba	fonction exp intégrale	suites
Asie juin 2015	loi binom, loi norm, loi exp	VF g. espace échant. algo	fam. fonction exp suites	complexes	
Antilles juin 2015	fonction ln et fam. fct.	loi exp, proba	suites	suites	
M. Réunion juin 2015	loi exp proba condi	géom espace	complexes	fonction ln intégrale	

F.4 Tableau – bac S 2016

	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Exercice 4	Exercice 5
Pondichéry avril 2016	loi norm, proba, échant	complexes	géom espace	QPI fonction ln	suite, algo, fonction exp
Liban mai 2016	géom espace	loi binom, échant, proba	fonction exp, intégrale, suite de fct	VF loi norm, complexes, fonction exp, algo	
Am. Nord juin 2016	proba, loi norm et binom	fonction ln, intégrale, volume, algo	QPI complexes	géom espace	
C. étrangers juin 2016	VF loi norm espace équation $f(x) = 0$	fonction, suite, intégrale	loi binom, échant, proba	complexes, algo	
Polynésie juin 2016	famille de fonction exp, algo	suites, tableur	loi exp, proba, échant	VF complexes, géom espace, intégrale	
M. Réunion juin 2016	proba, échant, loi exp	VF espace	fonction ln, algo, suite	trigo	
Antilles juin 2016	proba, loi bin, loi exp, échant	complexes	fonction exp et ln, intégrale	géom espace	
Asie juin 2016	proba, loi norm	famille fonctions exp et intégrales	suite, algo, fonction exp, échant	géom espace	

F.5 Tableau – bac S 2017

	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Exercice 4	Exercice 5
Pondichéry avril 2017	proba, loi exp, loi norm	complexes	fonction ln, intégrale	suites, tableur	géom espace
Am. Nord juin 2017	loi norm, proba, échant	fonction exp, intégrale	suites, algo	géom espace	
Liban juin 2017	géom espace, trigo, fonction	loi exp, loi norm,	famille de fonction exp, QPI	fonction ln, tableur	
C. étrangers juin 2017	QCM proba, échant, loi exp	géom espace	fonction exp, intégrale, suite	géom trigo, fct trigo, suite, algo	
Polynésie juin 2017	loi exp, proba, échant	fonction, optimisation	géom espace	fonction exp	
Antilles juin 2017	complexes	loi norm	fonction exp	fonction ln, suite	géom espace
M. Réunion juin 2017	fonctions exp et ln, intégrale, algo	géom espace	complexes, loi norm	proba, suite	
Asie juin 2017	fonction exp	suite, tableur	géom espace	intégrale, algo, échant	loi exp, échant, loi norm

F.6 Tableau – bac S 2018

	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Exercice 4	Exercice 5
Pondichéry mai 2018	algorithmique, suite, fonction exp, intégrale	complexes	loi normale, probabilité, échantillonnage	espace	
Liban juin 2018	loi exponentielle et normale	complexes	espace	famille fonctions ln, intégrale, suite	probabilité, suite
Am. Nord juin 2018	loi exponentielle, loi normale, probabilité , loi binomiale	famille fonction ln	espace	suite, tableur, fonction ln	
C. étrangers juin 2018	fonction exp, algorithmique, intégrale	VF loi exp et binomiale, logarithmes, complexes	loi normale, probabilité, suites	espace	
Antilles juin 2018	probabilité conditionnelle, loi normale, échantillonnage	espace	fonctions exp et trigo, intégrale	suite, tableur, algorithmique	
Polynésie juin 2018	Probabilité, échantillonnage, loi normale	fonction trigo à paramètres, volumes, algorithmique	fonction exp à paramètre, intégrale	suite, tableur	
Asie juin 2018	fonction exp paramétrée, intégrale	QCM probabilité, échantillonnage, loi normale, loi exponentielle	espace	complexes, algorithmique, fonctions	
M. Réunion juin 2018	fonction exp, algorithmique	Probabilité conditionnelle, loi binomiale, loi normale	espace	complexes, suite	

F.7 Tableau – bac S 2019

	Exercice 1	**Exercice 2**	**Exercice 3**	**Exercice 4**	**Exercice 5**
Am. Nord mai 2019	loi normale, échantillonnage, proba condi	Vrai/Faux complexes	fonction ln, suite, algorithmique	espace	
Liban mai 2019	fonction ln	complexes	espace	probas condi, suite	
Centres étrangers juin 2019	QCM loi binomiale, loi normale, loi exponentielle, échantillonnage	suite, algorithmique, intégrale	complexes,	espace	
Antilles juin 2019	fonction exp avec paramètres, intégrale	espace	Vrai/Faux complexes	probabilité conditionnelle, loi normale, loi exponentielle	
Polynésie juin 2019	loi exponentielle, loi normale, échantillonnage	fonction ln, intégrale	intégrale, suite, algorithmique	espace	
Asie juin 2019	suite, algorithmique, fonction exp	QCM espace	probabilité, échantillonnage, loi à densité, intégrale	complexes	
Métropole-Réunion juin 2019	fonction exp, intégrale	loi normale, probabilité conditionnelle, suite	Vrai/ Faux complexes, fonction exp et ln, algorithmique	espace	

Index