Chapitre 6

Variations d'une fonction

I Exercices

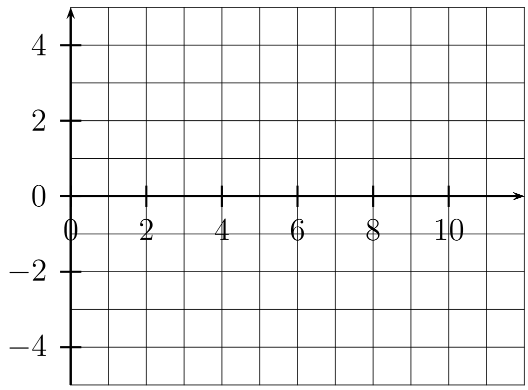
6.1 Sens de variation d'une fonction

Exercice 6.1

1. Tracer dans le repère ci-contre la représentation graphique d'une fonction f qui soit :
- croissante sur l'intervalle $[0\,;\,6]$
- décroissante sur l'intervalle $[6\,;\,10]$

2. a) Comment décririez-vous une fonction croissante sur un intervalle à quelqu'un qui ne sait pas ce que c'est ?

b) Même question pour une fonction décroissante sur un intervalle.

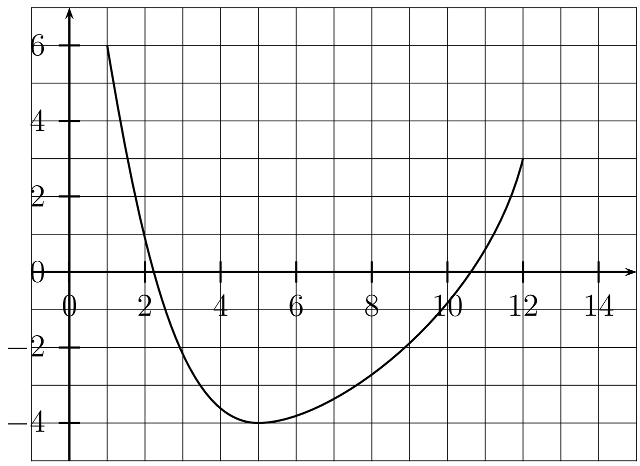


Exercice 6.2

Objectif : décrire les variations d'une fonction définie par une courbe.

L'unité du repère ci-contre est un carreau. La courbe ci-contre représente graphiquement une fonction f définie sur l'intervalle $[2\,;\,14]$.

Décrire les variations de cette fonction.

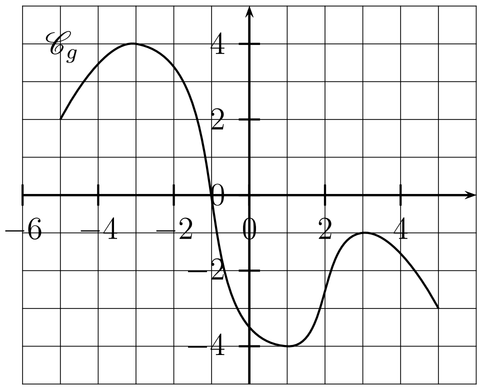


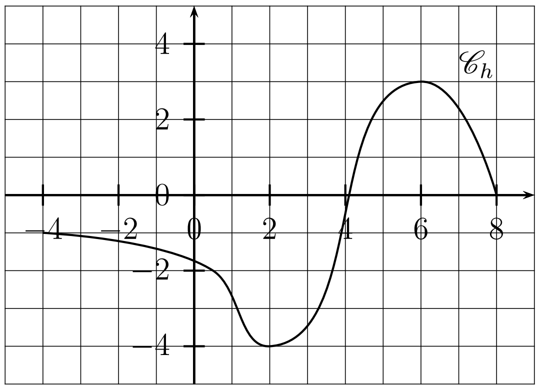
6.2 Tableau de variations

Avant de faire les exercices ci-dessous, lire les exemples 6.1 et 6.2 page 72.

Exercice 6.3

Dresser les tableaux de variations des deux fonctions g et h représentées ci-dessous (l'unité des deux repères est un carreau) ;





Exercice 6.4

Objectif : dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variations.

Une fonction f est définie sur l'intervalle $[-6\,;5]$ et son tableau de variations se trouve à droite.

Tracer deux repères et dessiner deux représentations graphiques possibles de la fonction f.

x	-6		-3		5
Variations de f			4		
	0	↗		↘	-2

6.3 Minimum et maximum

Exercice 6.5

Voici un tableau de valeurs d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,7]$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	4	−1	−4	−5	−4	−1	4	11

1. Le maximum d'une fonction f est la plus grande valeur prise par $f(x)$.

a) Quel est le maximum de la fonction f du tableau ci-dessus ?

b) Ce maximum correspond à quelle valeur de x ?

2. Le minimum d'une fonction f est la plus petite valeur prise par $f(x)$.

a) Quel est le minimum de la fonction f du tableau ci-dessus ?

b) Ce minimum correspond à quelle valeur de x ?

Exercice 6.6

Dans l'exercice 6.2

1. a) quel est le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[2\,;\,14]$?
   b) pour quelle valeur de x ce maximum est-il atteint ?
2. a) quel est le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[2\,;\,14]$?
   b) pour quelle valeur de x ce minimum est-il atteint ?

Exercice 6.7

Pour la fonction g de l'exercice 6.3,

1. a) quel est le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[-6\ ;\ 6]$?
   b) pour quelle valeur de x ce maximum est-il atteint ?
2. a) quel est le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[-6\ ;\ 6]$?
   b) pour quelle valeur de x ce minimum est-il atteint ?
3. a) quel est le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[1\ ;\ 6]$?
   b) pour quelle valeur de x ce maximum est-il atteint ?

Exercice 6.8

Pour la fonction h de l'exercice 6.3,

1. a) quel est le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[-5\ ;\ 9]$?
   b) pour quelle valeur de x ce maximum est-il atteint ?
2. a) quel est le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[-5\ ;\ 9]$?
   b) pour quelle valeur de x ce minimum est-il atteint ?

Exercice 6.9

On donne le tableau de variations suivant d'une fonction f.

x	2		3		5		6
Variations de f	0	↗	2	↘	-1	↗	3

1. Tracer un repère et dessiner une représentation graphique possible de la fonction f.
2. Décrire les variations de f par des phrases.
3. Donner le maximum de f sur l'intervalle $[2\,;\,6]$ en précisant la valeur de x où il est atteint.
4. Donner le minimum de f sur l'intervalle $[2\,;\,6]$ en précisant la valeur de x où il est atteint.

6.4 Utilisation d'une calculatrice pour observer les variations d'une fonction

Exercice 6.10

La fonction f est définie par $f(x) = -25x^2 + 140x - 146$ sur l'intervalle $[1\ ;\ 4]$.

1. Saisir la fonction f à la calculatrice.
2. Utiliser la calculatrice pour compléter le tableau ci-dessous.

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$							

3. Faire afficher la représentation graphique de la fonction avec la calculatrice.
4. S'il y a un minimum ou un maximum, le déterminer à la calculatrice.
5. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

Exercice 6.11

La fonction f est définie par $f : x \longmapsto 49x^2 - 280x + 400$ sur l'intervalle $[-1\ ;\ 6]$.

Utiliser la calculatrice pour dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[-1\ ;\ 6]$.

- Saisir la fonction.
- Observer la courbe sur l'intervalle $[-1\ ;\ 6]$.
- Déterminer le minimum ou le maximum, avec la valeur de x où il est atteint.
- Dresser le tableau de variations en arrondissant certaines valeurs au centième si nécessaire.

Exercice 6.12

Même exercice que le précédent avec la fonction $f : x \longmapsto x^3 - 6x^2 + 11x - 5$ sur l'intervalle $[0,9\ ;\ 3]$.

Exercice 6.13

Même exercice que le précédent avec la fonction $f : x \longmapsto x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120$ sur l'intervalle $[1,8\ ;\ 5,1]$

6.5 Variations d'une fonction affine

Exercice 6.14

Quatre fonctions affines sont définies ci-dessous.

$f : x \longmapsto 2x + 5$ $\quad g : x \longmapsto 0,5x + 5$ $\quad h : x \longmapsto -1,5x + 5$ $\quad p : x \longmapsto -3x + 5$

Ces fonctions ont la même ordonnée à l'origine qui est 5 et les coefficients directeurs sont différents : 2 ; 0,5 ;$-1,5$; -3.

En observant les représentations graphiques de ces fonctions quel semble être le lien entre le sens de variation d'une fonction affine et son coefficient directeur ?

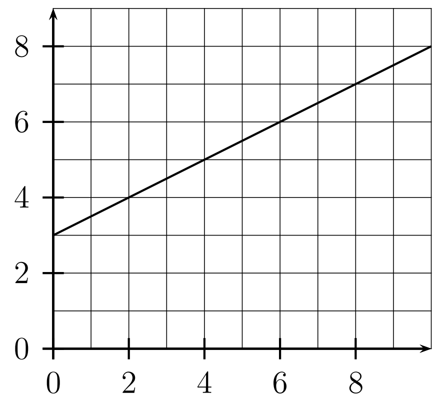
Exercice 6.15

Sans calculatrice, dresser les tableaux de variations de ces fonctions affines sur l'intervalle $[0 ; 10]$.

$f : x \longmapsto 7x + 5$ $\quad g : x \longmapsto -20x$ $\quad h : x \longmapsto -4x + 10$ $\quad k : x \longmapsto 0,5x + 1$

Exercice 6.16

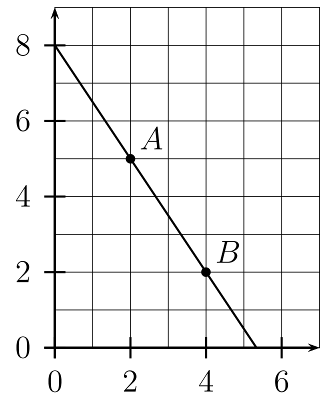
La fonction f est définie par $f(x) = 0,5x + 3$ et elle est représentée ci-contre.



1. Calculer $\dfrac{f(4) - f(2)}{4 - 2}$ et $\dfrac{f(8) - f(2)}{8 - 2}$.
2. Que constate-t-on ?
3. Sur la figure que représentent
   $f(4) - f(2) \quad 4 - 2 \quad f(8) - f(2) \quad 8 - 2$
   et les quotients $\dfrac{f(4) - f(2)}{4 - 2}$ et $\dfrac{f(8) - f(2)}{8 - 2}$?

Exercice 6.17

La droite (AB) tracée ci-contre représente une fonction affine f, définie par $f(x) = ax + b$.

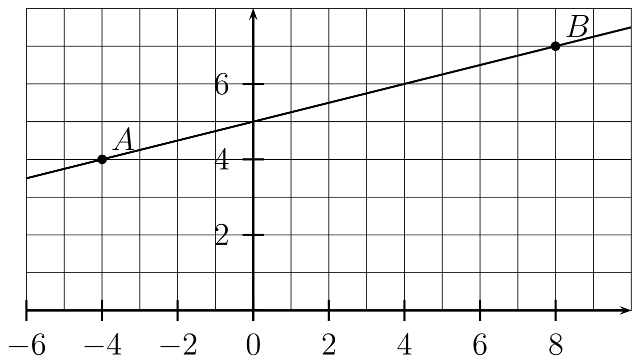


1. Quelles sont les coordonnées des points A et B ?
2. Quelles sont les valeurs de $f(x_A)$ et $f(x_B)$?
3. Calculer le coefficient directeur a de la fonction affine f.
4. Calculer maintenant l'ordonnée à l'origine en déterminant $f(0)$ de deux façons.
5. Donner l'expression algébrique complète de $f(x)$.

Exercice 6.18

La droite (AB) tracée ci-contre représente une fonction affine f, définie par : $f(x) = ax + b$.

Calculer le coefficient directeur a et l'ordonnée à l'origine b, puis donner l'expression algébrique complète de $f(x)$.



6.6 Variations des fonctions carré, cube, racine carrée, inverse

Exercice 6.19

1. La fonction carré est la fonction $x \longmapsto x^2$.
   Dresser le tableau de variation de la fonction carré sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$.
2. La fonction cube est la fonction $x \longmapsto x^3$.
   Dresser le tableau de variation de la fonction cube sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$.
3. La fonction racine carrée est la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$.
   Dresser le tableau de variation de la fonction racine carrée sur son ensemble de définition.

Exercice 6.20

La fonction inverse est la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.

La fonction inverse n'est pas définie en $x = 0$, puisque on ne peut pas diviser par zéro, donc dans son tableau de variations on trace une double barre verticale pour $x = 0$ (voir ci-dessous).

Compléter ce tableau de variations.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$		||	

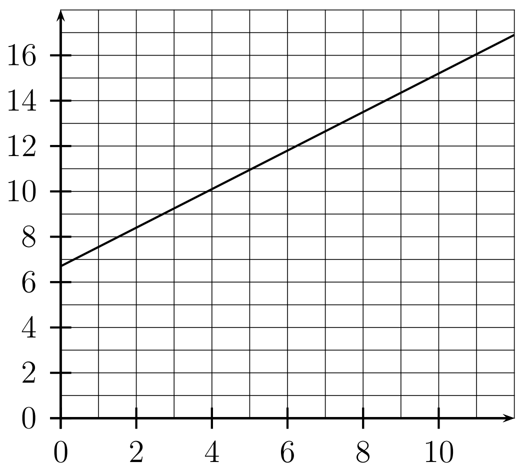
6.7 Comparer les images de deux nombres

Les exercices qui suivent concerne la capacité ci-dessous du programme.

Pour deux nombres a et b donnés et une fonction de référence f, savoir comparer $f(a)$ et $f(b)$ numériquement ou graphiquement.

Exercice 6.21

La fonction f est représentée ci-dessous par une droite.



1. Quelle est la nature de cette fonction ?

....

2. Quel est le sens de variation de cette fonction ?

....

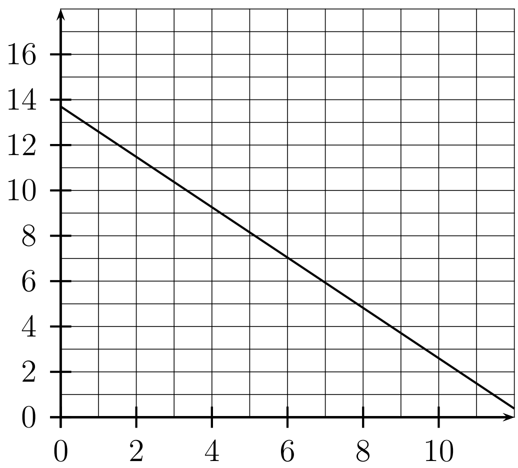
3. Compléter ci-dessous avec les signes > ou <, et tracer des traits dans les deux repères ci-dessous.

$3 \ldots 5$ donc $f(3) \ldots f(5)$

$11 \ldots 8$ donc $f(11) \ldots f(8)$

Exercice 6.22

La fonction f est représentée ci-dessous par une droite.



1. Quelle est la nature de cette fonction ?

....

2. Quel est le sens de variation de cette fonction ?

....

3. Compléter ci-dessous avec les signes > ou <, et tracer des traits dans les deux repères ci-dessous.

$3 \ldots 2$ donc $f(3) \ldots f(2)$

$7 \ldots 9$ donc $f(7) \ldots f(9)$

Exercice 6.23

La fonction f est la fonction $x \longmapsto -1,75x + 19,4$

1. Quel est le sens de variation de la fonction f ? Justifier
2. Sans calcul, compléter ci-dessous avec les signes > ou <.
   a) $2,8 \ldots\ 4,1$ donc $f(2,8) \ldots f(4,1)$ b) $8,45 \ldots\ 6,7$ donc $f(8,45) \ldots f(6,7)$
   c) $9,21 \ldots\ 9,2$ donc $f(9,21) \ldots f(9,2)$

Exercice 6.24

Sans calcul, compléter ci-dessous avec les signes ¿ ou >.

1. $7,2^2 \ldots\ 9,4^2$ **2.** $(-23)^2 \ldots\ (-17)^2$ **3.** $1,4^3 \ldots\ 1,5^3$ **4.** $\dfrac{1}{6,47} \ldots \dfrac{1}{6,48}$

Exercice 6.25

Sans calcul, compléter ci-dessous avec les signes > ou <.

1. $37^3 \ldots 36,8^3$ **2.** $\dfrac{1}{295} \ldots \dfrac{1}{301}$ **3.** $(-8,42)^2 \ldots (-8,46)^2$ **4.** $69^2 \ldots 72^2$

6.8 Algorithmique

Exercice 6.26

La fonction f est définie par $f : x \longmapsto x^2 - 6x + 13$.

1. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0\,;\,6]$.
2. Exécuter l'algorithme ci-dessous en détaillant les valeurs de a, b, $f(a)$, et $f(b)$.
   - a vaut 2,5 et b vaut 2,6
   - On vérifie que $f(a) > f(b)$
   - Ensuite,
     - Tant que $f(a) > f(b)$, on augmente a et b de 0,1
     - Dès que $f(a) \leqslant f(b)$ on arrête.
3. Dans cet algorithme, quelle est la dernière valeur de a et quelle est la dernière valeur de $f(a)$?
4. Que signifient ces deux valeurs pour la fonction f ?

Exercice 6.27

La fonction f est définie par $f : x \longmapsto 9x^2 - 42x + 40$.

1. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0\,;\,4]$.
2. Exécuter l'algorithme ci-dessous en détaillant les valeurs de a, b, $f(a)$, et $f(b)$.
   - a vaut 2 et b vaut 2,2
   - On vérifie que $f(a) > f(b)$
   - Ensuite,
     - Tant que $f(a) > f(b)$, on augmente a et b de 0,2
     - Dès que $f(a) \leqslant f(b)$ on arrête.
3. Dans cet algorithme, quelle sont les dernières valeurs de a de b, de $f(a)$ et de $f(b)$?
4. Où se situe le minimum par rapport à ces valeurs ?
5. a) Reprendre l'algorithme ci-dessus, en partant de $a = 2,2$ et $b = 2,21$ et en augmentant a et b de 0,01 à chaque étape.
   b) Répondre à nouveau aux questions **3.** et **4.** dans ce cas.

II Cours

6.0 Programme

Contenus

- Croissance, décroissance, monotonie d'une fonction définie sur un intervalle. Tableau de variations.
- Maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.
- Pour une fonction affine, interprétation du coefficient directeur comme taux d'accroissement, variations selon son signe.

Capacités attendues

- Relier représentation graphique et tableau de variations.
- Exploiter un logiciel de géométrie dynamique ou de calcul formel, la calculatrice ou Python pour décrire les variations d'une fonction donnée par une formule.
- Déterminer graphiquement les extremums d'une fonction sur un intervalle.
- Traiter de problèmes d'optimisation.
- Relier sens de variation, signe et droite représentative d'une fonction affine.
- Pour deux nombres a et b donnés et une fonction de référence f, comparer $f(a)$ et $f(b)$ numériquement ou graphiquement.
- Variations des fonctions carré, inverse, cube.

Démonstration

Variations des fonctions carré, inverse.

Exemple d'algorithme

Pour une fonction dont le tableau de variations est donné, algorithmes d'approximation numérique d'un extremum (balayage, dichotomie).

6.1 Sens de variations d'une fonction

Vocabulaire

Le mot *croissant* vient du verbe *croître* qui veut dire *augmenter*.

Le mot *croissant* veut donc dire *qui augmente*, et le mot *décroissant* veut donc dire *qui diminue*.

Définition 6.1 (Description intuitive)

- Dire qu'une fonction est croissante sur un intervalle $[a\,;\,b]$ signifie que, dans l'intervalle $[a\,;\,b]$, lorsque x augmente, $f(x)$ augmente.
  Sur l'intervalle $[a\,;\,b]$, si on parcourt la courbe représentative avec la pointe d'un crayon de la gauche vers la droite, la pointe du crayon monte.
- Dire qu'une fonction est décroissante sur un intervalle $[a\,;\,b]$ signifie que, dans l'intervalle $[a\,;\,b]$, lorsque x augmente, $f(x)$ diminue.
  Sur l'intervalle $[a\,;\,b]$, si on parcourt la courbe représentative avec la pointe d'un crayon de la gauche vers la droite, la pointe du crayon descend.

Définition 6.2

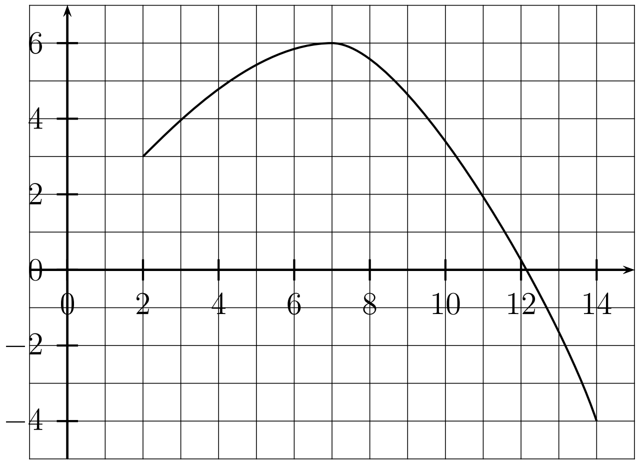
- Dire qu'une fonction est croissante sur un intervalle signifie que pour tous nombres de cet intervalle, deux nombres et leurs images sont rangés dans le même ordre.
- Dire qu'une fonction est décroissante sur un intervalle signifie que pour tous nombres de cet intervalle, deux nombres et leurs images sont rangés dans l'ordre contraire.

Définition 6.3

- Dire qu'une fonction f est strictement croissante sur un intervalle I signifie que pour tous nombres réels a et b de l'intervalle I, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$.
- Dire qu'une fonction f est strictement décroissante sur un intervalle I signifie que pour tous nombres réels a et b de l'intervalle I, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.

Exemple 6.1 (Décrire les variations d'une fonction)

Énoncé : l'unité du repère ci-dessous est un carreau. La courbe ci-dessous représente graphiquement une fonction f définie sur l'intervalle $[2\,;\,14]$. Décrire le comportement de cette fonction.



Corrigé : d'après la courbe de la fonction f, on peut dire que :

- l'image de 2 est 3 ;
- l'image de 7 est 6 ;
- l'image de 14 est -4 ;
- la fonction f est croissante sur l'intervalle $[2\,;\,7]$;
- la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[7\,;\,14]$.

6.2 Tableau de variations

Exemple 6.2

Le tableau ci-contre est le tableau de variations de la fonction f de l'exemple 6.1 ci-dessus.

x	2		7		14
$f(x)$			6		
	3	↗		↘	-4

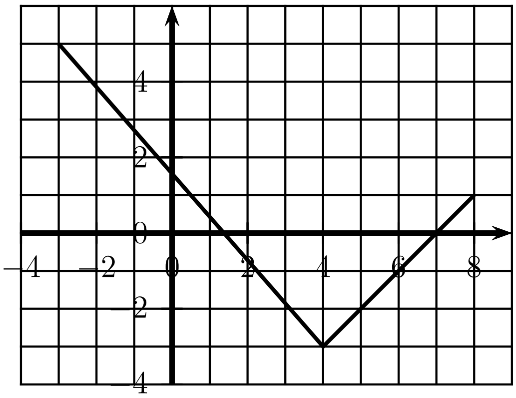
Exemple 6.3

Une fonction f est définie sur l'intervalle $[-3\,;\,8]$ et son tableau de variations se trouve ci-contre.
Dessiner une représentation graphique compatible avec ce tableau de variations.

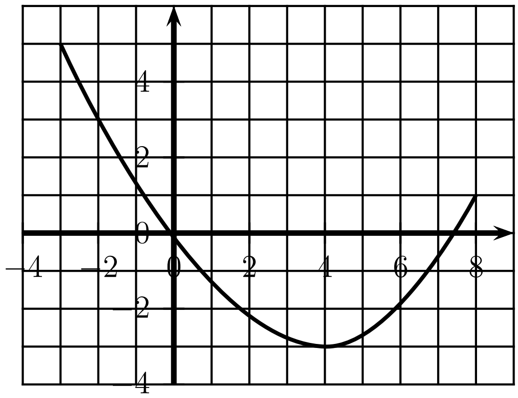
x	-3		4		8
$f(x)$	5				1
		↘	-3	↗	

Réponse

On peut avoir comme représentation graphique



ou



6.3 Minimum et maximum

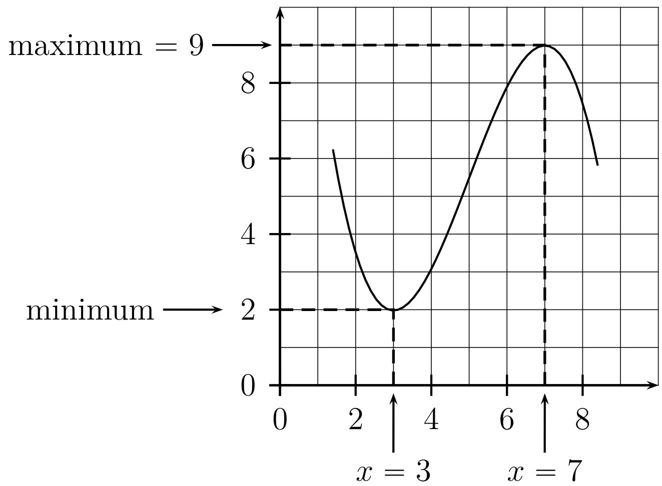
Définition 6.4

- Le maximum M d'une fonction f sur un intervalle est la plus grande valeur prise par $f(x)$ lorsque x parcourt cet intervalle.
  On a alors, pour tout nombre réel x de cet intervalle, $M \geqslant f(x)$.
- Le minimum m d'une fonction f sur un intervalle est la plus petite valeur prise par $f(x)$ lorsque x parcourt cet intervalle.
  On a alors, pour tout nombre réel x de cet intervalle, $m \leqslant f(x)$.

Exemple 6.4

La fonction f est représentée ci-contre sur l'intervalle $[1,4\ ;\ 8,4]$.

- Le minimum de la fonction f est 2, et il est atteint lorsque $x = 3$.
- Le maximum de la fonction f est 9, et il est atteint lorsque $x = 7$.



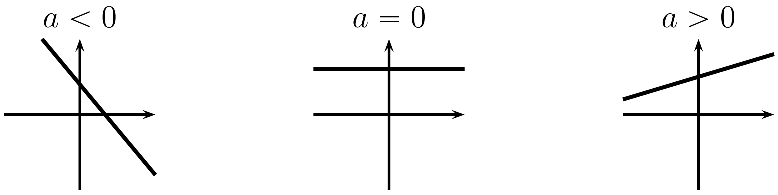
6.4 Variations d'une fonction affine

6.4.a Sens de variation d'une fonction affine.

Propriété 6.1

- Une fonction affine de coefficient directeur positif est croissante ;
- Une fonction affine de coefficient directeur négatif est décroissante ;
- Une fonction affine de coefficient directeur nul est constante.

$$f(x) = ax + b$$

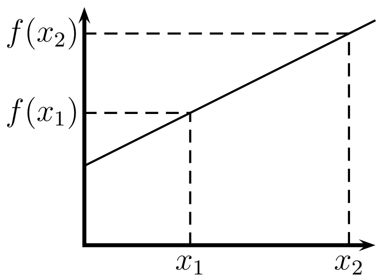


6.4.b Taux de variations

Propriété 6.2

Pour deux nombres différents x_1 et x_2 et une fonction affine, définie par $f(x) = ax + b$, on a :
$a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Figure



Remarque

Le taux de variation est aussi appelé taux d'accroissement Dans le cas d'une fonction affine décroissante le taux d'accroissement est négatif et dans ce cas, le mot *accroissement* est trompeur puisqu'il s'agit d'une diminution alors que le mot variation peut indiquer un accroissement ou une diminution.

6.4.c Calculer une fonction affine

Plus exactement, pour une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$, on peut calculer le coefficient directeur a et l'ordonnée à l'origine b quand on connaît deux nombres et leurs images par cette fonction affine f.

Exemple 6.5

La droite (AB) tracée ci-dessous représente une fonction affine f, définie par $f(x) = ax + b$.

Calculons le coefficient directeur a et l'ordonnée à l'origine b.

Par lecture graphique, on a : $x_A = 2 \quad x_B = 6 \quad f(x_A) = 4 \quad f(x_B) = 6$

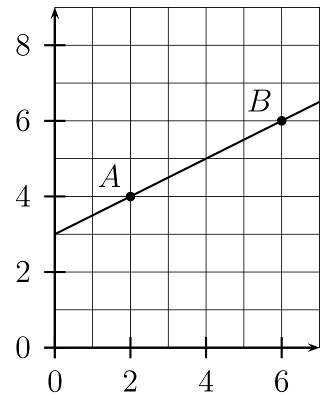
Coefficient directeur : $a = \dfrac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \dfrac{6-4}{6-2} = \dfrac{2}{4} = 0,5$

Donc : $f(x) = 0,5x + b$

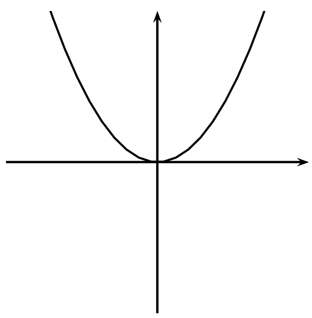
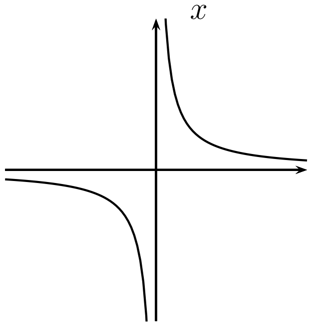
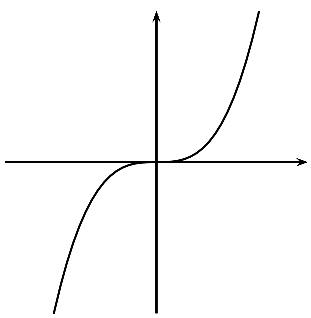
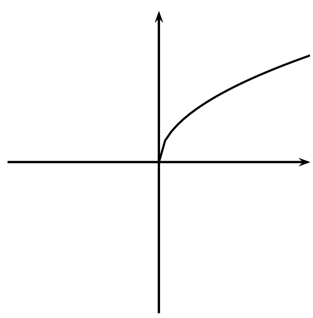
Ordonnée à l'origine :

On a : $f(x_A) = 0,5x_A + b \iff b = f(x_A) - 0,5x_A = 4 - 0,5 \times 2 = 3$

Donc : $\boxed{f(x) = 0,5x + 3}$



6.5 Variations des fonctions carré, inverse, cube, racine carrée

Fonction carré $x \longmapsto x^2$	Fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	Fonction cube $x \longmapsto x^3$	Fonction racine carrée $x \longmapsto \sqrt{x}$
			

Propriété 6.3 (Variations de la fonction carré)

- La fonction carré est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$.
- La fonction carré est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Propriété 6.4 (Variations de la fonction inverse)

- La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$.
- La fonction inverse est décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Propriété 6.5 (Variations de la fonction cube)

La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.

Propriété 6.6 (Variations de la fonction racine carrée)

La fonction racine carrée est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.